複素数平面の問題を探る
～九州大学前期理系学部第５問～

山川（やまかわ）　宏史（ひろふみ）

§1.　はじめに

新課程実質初年度の今年，各校で複素数平面が本格的に出題された。前期九州大学の問題は一見してバラバラにしか見えないが，実は各問につながりがあることがわかる。しっかりと味わってみよう。

> 以下の問いに答えよ。
>
> (1)　θ を $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。
>
> $$\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),$$
> $$\sin n\theta=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$
>
> (2)　次の方程式を満たす実数 x $(0\leqq x<2\pi)$ を求めよ。
>
> $$\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$$
>
> (3)　次の式を証明せよ。
>
> $$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{9}{4}$$

§2.　標準的な解答

(1) **証明** ド・モアブルの定理により

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{1}{z^n}=\cos n\theta-i\sin n\theta \quad \cdots\cdots②$$

①＋② より　$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

よって　$\cos n\theta=\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$

①－② より　$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$

よって　$\sin n\theta=-\dfrac{i}{2}\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)$　**終**

(2)　和積交換公式，倍角の公式により

$$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x-\left(2\cos^2\frac{3}{2}x-1\right)=1$$

$$\cos\frac{3}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{1}{2}x\right)=0$$

$$-2\cos\frac{3}{2}x\sin x\sin\frac{1}{2}x=0$$

$0\leqq x<2\pi$ であるから

$\dfrac{3}{2}x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi$ または $x=0,\ \pi$

よって　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　……**答**

@ 3 倍角の公式の利用も可。

(3) **証明** 半角の公式，和積交換公式により

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 80^\circ)+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(1-\cos 160^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(2\cos 100^\circ\cos 60^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 100^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(-\cos 80^\circ+\cos 80^\circ)=(\text{右辺})$$　**終**

§3.　九州大学の希求した？解答

(2)　$z=\cos x+i\sin x$ とおく。(1)の余弦版により

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=1$$

$z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと

$$t+(t^2-2)-(t^3-3t)=2$$
$$t^3-t^2-4t+4=0$$
$$(t-1)(t^2-4)=0$$

よって　$t=1,\ \pm 2$

・$z+\dfrac{1}{z}=1$ のとき

$$z^2-z+1=0 \quad z=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

・$z+\dfrac{1}{z}=2$ のとき

$$z^2-2z+1=0 \quad z=1$$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=0$

・$z+\dfrac{1}{z}=-2$ のとき

$$z^2+2z+1=0 \quad z=-1$$

$0\leqq x<2\pi$ であるから　$x=\pi$

以上から　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　……答

@(1)を用いたが，これは長いし時間的に難しい。

(3) 証明 $w=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ とおく。

半角の公式と(1)の余弦版により

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 80^\circ)\\&\quad+\frac{1}{2}(1-\cos 120^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 160^\circ)\\&=2-\frac{1}{4}\left\{\left(w+\frac{1}{w}\right)+\left(w^2+\frac{1}{w^2}\right)\right.\\&\qquad\left.+\left(w^3+\frac{1}{w^3}\right)+\left(w^4+\frac{1}{w^4}\right)\right\}\\&=2-\frac{w^8+w^7+w^6+w^5+w^3+w^2+w+1}{4w^4}\end{aligned}$$

……③

ここで $w^9=1$ より

$$(w-1)(w^8+w^7+w^6+w^5+w^4+w^3+w^2+w+1)=0$$

$w\neq 1$ であるから

$$w^8+w^7+w^6+w^5+w^4+w^3+w^2+w+1=0$$

……④

④を③に代入して

$$(\text{左辺})=2-\frac{-w^4}{4w^4}=\frac{9}{4}=(\text{右辺})$$ 終

(2)，(3)でこの解法を用いた受験生は皆無であったと予測できる。試験会場では時間的に厳しい。九大としては，ねらいが活かされなかったのではないか。その点で残念。

次に，(1)の正弦版を用いた解法を紹介する。こちらはさらにマニアック。

§4. 正弦版を用いた解法

(2) 倍角の公式により

$$1-2\sin^2\frac{x}{2}+1-2\sin^2 x-\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)=1$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 x=\sin^2\frac{3}{2}x$$

$z=\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}$ とおく。(1)の正弦版により

$$-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{4}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)^2$$

・$z-\dfrac{1}{z}=0$ のとき

$z=\pm 1$　$0\leqq\dfrac{x}{2}<\pi$ であるから　$\dfrac{x}{2}=0$

よって　$x=0$

・$z-\dfrac{1}{z}\neq 0$ のとき

$$1+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\left(z^2+1+\frac{1}{z^2}\right)^2$$

$z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと

$$1+t^2=(t^2-1)^2$$
$$t^4-3t^2=0$$
$$t=0,\ \pm\sqrt{3}$$

よって　$z=\pm i,\ \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$　（複号任意）

$0\leqq\dfrac{x}{2}<\pi$ であるから　$\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

以上から　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　……答

@(1)を用いたが，長すぎる。

(3) 証明 $w=\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ$ とおくと

$$w^9=-1 \quad ……⑤$$

$$(w+1)(w^8-w^7+w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1)=0$$

$w\neq -1$ であるから

$$w^8-w^7+w^6-w^5+w^4-w^3+w^2-w+1=0 ……⑥$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=-\frac{1}{4}\left(w-\frac{1}{w}\right)^2-\frac{1}{4}\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)^2\\&\quad-\frac{1}{4}\left(w^3-\frac{1}{w^3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(w^4-\frac{1}{w^4}\right)^2\\&=2-\frac{w^{16}+w^{14}+w^{12}+w^{10}+w^6+w^4+w^2+1}{4w^8}\\&=2-\frac{-w^7-w^5-w^3-w+w^6+w^4+w^2+1}{4w^8}\end{aligned}$$

（⑤より）

$$=2-\frac{-w^8}{4w^8}\quad(⑥より)$$

$$=\frac{9}{4}=(\text{右辺})\quad\boxed{終}$$

§5. おまけ

なお，三角形の重心を用いると，次のようにもできる。

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 80^\circ)+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(1-\cos 160^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 280^\circ+\cos 160^\circ)$$

ここで，単位円上の 3 つの複素数で偏角が 40°，160°，280° のものを考えると，これらは，正三角形の 3 つの頂点であるから，その重心は原点である。よって

$$\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 280^\circ+\cos 160^\circ)=\frac{9}{4}\quad\boxed{終}$$

@これなら，お手軽。しかし，⑴を用いていない。

§6. おわりに

新課程入試の目玉である複素数平面の問題が出題され続けることは間違いない。しばらくの間は，典型問題をまんべんなく演習し，準備しておけば一応大丈夫であろう。ただし，この分野が合否の鍵を握ることも間違いないので，微積分の計算の次に重点的に精度の高い完成度にもっていく必要がある。また，近い将来にはマンネリ化の影響で，図形問題を中心に高度なマニアックな問題が増加することは予想される。例えば，曲線を原点の周りに回転した曲線の方程式を求めるなど，学習指導要領では触れられていないような出題もありうる。超難関大学など，特殊な訓練が要求されることも大いに予想されるので，指導する側が日々研究することが第一に重要であるし，指導者の個人的な力量の差が出る分野であろう。それゆえ，教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。読者の皆さん，お互いに謙虚に切磋琢磨いたしましょう。よい情報をお持ちの方は，ご連絡を。ご精読に感謝。

（岡山県立岡山朝日高等学校）