不等式の絶対値をはずすことに用いる同値関係のスマートな証明法
～絶対値の定義の言い換えを用いて～

内田(うちだ)　康晴(やすはる)

§1. はじめに

絶対値を含む不等式について次が成り立ちます。

$|A|<B \iff -B<A<B$ ……①
$|A|>B \iff A<-B,\ B<A$ ……②

これは，次のような不等式を解くのに有効です。

$|x^2-2x-2|<-x+4$ ……③

①を用いると

③ $\iff -(-x+4)<x^2-2x-2<-x+4$ ……④

と同値変形できます。

ただ，問題は①，②の証明です。これは数研通信の過去の記事〔1〕で一度取り上げられています。そこでは x の実数値関数 $F(x)$，$G(x)$ についての形で考えています。例えば①は

$|F(x)|<G(x) \iff -G(x)<F(x)<G(x)$……⑤

で，真理集合 $P=\{x\in R : |F(x)|<G(x)\}$

$Q=\{x\in R : -G(x)<F(x)<G(x)\}$

について，$P=Q$ を証明しています。しかしながら，証明が煩雑になってしまうため，「(この同値変形は)大部分の生徒には，紹介すべきでない。」と結論づけられています。

ここでは，「大部分の生徒に紹介」可能な証明を紹介したいと思います。

§2. 絶対値の定義の言い換え

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるが，a が 0 でないとき，a と $-a$ は一方が正，他方が負であるから，次のような言い換えができる。

$|a|=$(a と $-a$ の負でない方の値)

したがって，さらに次のように言い換えてよい。

$|a|=$(a と $-a$ の小さくない方の値)

つまり　$|a|=\mathrm{Max}(a,\ -a)$ ……⑥

§3. 同値関係①，②の証明

⑥を利用して，以下のように証明できる。

(①の証明)

$|A|=\mathrm{Max}(A,\ -A)$ であるから

$|A|<B \iff \mathrm{Max}(A,\ -A)<B$
$\iff A<B$ かつ $-A<B$
$\iff -B<A<B$

(②の証明)

$|A|>B \iff \mathrm{Max}(A,\ -A)>B$
$\iff A>B$ または $-A>B$
$\iff A<-B,\ B<A$

(①，②の証明終わり)

これから「③$\iff$④」の成立も結論できる。

なお，生徒の中には，変数 x が含まれているので，③に対して①を適用することに疑問をもつものがいるかもしれない。しかし，「③$\iff$④」とは

「x の各値(固定する)について『③$\iff$④』」

ということであり，記号$\iff$の左右で x の値に変化はない。③における x と④における x は同じ値なのであるから，$A=x^2-2x-2$，$B=-x+4$ とおくことで，①から「③$\iff$④」が導かれる。(同様に⑤もいえる。)こういった点を丁寧に説明するとよいであろう。

(編集部注：①からは「$|x|<-2 \iff 2<x<-2$」のようなものも導かれる。これも正しいことは，両辺の真理集合が $\varnothing$ で一致していることからもわかる。)

《参考文献》

〔1〕　数研通信 46 号「—教育現場における基礎研究—絶対値不等式の扱いをめぐって」2003 年

(岡山県立岡山朝日高等学校)