嘘を付けなかった悪魔

内藤　康正（ないとう　やすまさ）

§1. はじめに

数学の命題の大半は「p ならば q」の形式ですが，教科書には日常用語の「ならば」がそのまま持ち込まれていて，生徒にとって決して学びやすいとは言えない状況にあると思います。

この小文では命題“$p \Longrightarrow q$”を条件文と呼び，高校の現場に即して「ならば」について考えてみたいと思います。

問題 1（2004 慶応大学・総合政策）

> 天使はつねに真実を述べ，悪魔はつねに嘘を付く。A，B は悪魔か天使であることは分かっているが，どちらかはっきりしない。A がこう言った。
> 「私が天使ならば，B も天使です。」…①
> 2 人の正体について正しいのは次のうちどれか。
> 1．A，B ともに天使である。
> 2．A は天使，B は悪魔である。
> 3．A は悪魔，B は天使である。
> 4．A，B ともに悪魔である。

この入試問題に対して，ある市販の入試問題正解集に次のような解答が載っていました。

> **解答**：A が悪魔であるとすると，①の仮定が偽であるから①は真となり，悪魔であるAが真実を述べたことになって矛盾。よってAは天使。以下略

教科書にはない“仮定が偽の条件文は真”であることを用いて一刀両断という感じがします。

§2. 日常用語の「ならば」は「if and only if」

この“仮定が偽の条件文は真”について分かりやすく説明する試みを参考書や受験雑誌で見かけることがあります。中でも，

「明日晴れたら，遊園地に行こう」…②

といった類の「約束」がよく用いられて，雨のときに遊園地に行こうが行くまいが約束違反とは言えないという趣旨です。しかし，すっきり納得できない気もします。条件文に直訳して整理すると，約束②は「明日晴れる」を条件 p,「遊園地に行く」を条件 q として“$p \Longrightarrow q$”です。そして p, q の真偽の組合せから次の 4 ケースが考えられます。(このケースA～Dは，以降もそのまま用います。)

ケースA　(p が真，q が真)
　「晴れて，遊園地に行った」
ケースB　(p が真，q が偽)
　「晴れたのに，遊園地に行かなかった」
ケースC　(p が偽，q が真)
　「晴れなかったが，遊園地に行った」
ケースD　(p が偽，q が偽)
　「晴れずに，遊園地に行かなかった」

A は約束が守られたケースで，B は約束違反です。先の説明はケースCとDですが，C では雨のときは友達を呼ぶ約束をしたから遊園地に行くと言われても困る，ということも日常生活では十分考えられます。やはり約束②は

　晴れたら行く　(ケース A)
　晴れなければ行かない　(ケース D)

ととらえるのが自然ではないでしょうか。定期テストで「30 点以上ならば合格」という約束は，通常は 30 点未満不合格をも意味しています。

日常生活における「ならば」は「if and only if」の用語であり，数学用語の「ならば」とは違うものと割り切る必要がありそうです。

§3. 問題に潜む“仮定が偽”

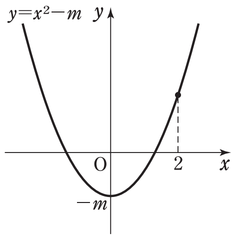
教科書では仮定が偽の条件文を直接扱っていないとはいえ,「空集合は任意の集合の部分集合」は「仮定が偽の条件文は真」そのものであるように，実質

的に“仮定が偽”が顔を出さないはずがありません。例えば次の問題2を見てください。数研出版数学Ⅰ p 117 演習問題 10 を単純にしたものです。

問題2

関数 $y=x^2-m$ について 　$x>2$ の範囲で y の値が常に正となるよう定数 m の値の範囲を定めよ。

命題「$x>2 \Longrightarrow x^2-m>0$」を真にせよ　…③
ということです。



1年生の中には正解の $m<4$ に首を傾げる生徒がいます。
「確かにこれで
　$x>2$ のとき $y>0$
ですけど，
　$x\leqq 2$ なのに $y>0$
のところもあります。」
という言い分です。(右図)

問題2を③に読み替えて考えた以上,「ならば」が「if and only if」である生徒にとってこの疑問は至極もっともです。想像以上に混乱をきたす場面ではないかと思います。

2学年に進んでも，関数 $f(x)$ について

$$x=a \text{ で極値} \Longrightarrow f'(a)=0$$

が成り立つことは了解したのに,

$$x=a \text{ で極値をとらないのに } f'(a)=0$$

となるケースCが，頭では分かってもすっきり整理し切れない生徒が現れます。逆は必ずしも真ならずの出番でもありますが，意欲ある生徒には§4のように正面から“仮定が偽”の説明を試みることにしています。

§4. すべての x について真にしたいだけ

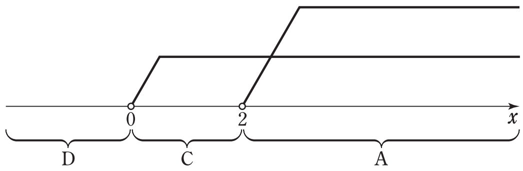
例えば,

　真の命題「$x>2 \Longrightarrow x>0$」 …④

を数直線で考えると，すべての x が

ケースA「$x>2$ を満たし，$x>0$ も満たす」
ケースC「$x>2$ は満たさず，$x>0$ は満たす」
ケースD「$x>2$ を満たさず，$x>0$ も満たさない」

のいずれかに該当していることが分かります。



すべての x について④が真になることをもって，④が命題全体として真であると認めたい都合上,

　$3>2 \Longrightarrow 3>0$　(ケースA)
(2より大きい3は，当然0よりも大きい)

だけではなく，仮定が偽のケース

　$1>2 \Longrightarrow 1>0$　(ケースC)
　$-1>2 \Longrightarrow -1>0$　(ケースD)

なども真とみるということです。これらは「たとえ $1>2$ であっても，$1>0$ であることには違いない」「$-1>2$ が正しいくらいなら，$-1>0$ だって良いではないか」などと納得できる生徒もいると思います。むしろその方が「p ならば q」は「p だから q」ではないことが伝わる気もします。

ここで整理しなくてならないことは，条件文“$p(x) \Longrightarrow q(x)$”は，個々の x の値ごとの真偽と，命題全体の真偽の両方があって,

「“$p(x) \Longrightarrow q(x)$”が全体として真である。」

とは,

「すべての x で“$p(x) \Longrightarrow q(x)$”が真である。」

という点です。そして命題④が命題全体として真である真の理由は，ケースBの

「$x>2$ を満たすが
　　$x>0$ は満たさない x」

が数直線上にないことです。これに呼応するように“$p(x) \Longrightarrow q(x)$”を

「$p(x)$ を満たすが
　　$q(x)$ は満たさない x」がないこと　…⑤

と定義します。1つの記号 ⇒ を，定義のない状態で用いているのが現状です。またこの定義を提示すると，⑤が「すべての x が $p(x)$ を満たさないか，$q(x)$ を満たす」ことと同じだと気がつく生徒も現れます。彼らは

「$p \Longrightarrow q \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{p} \vee q$」

を得たことになり，論理を操る楽しさを獲得したことになると思います。

§5. 背理法でミス

以上のように，条件文“$p \Longrightarrow q$”はすべての場合を考えた上で，「もし」p ならば q だ，p なのに q でないのは困る，という主張です。しかし，定義抜きで考えていると，仮定の p が成り立つ場合に限定して考えてしまいがちです。このことが如実に現れるのが命題“$p \Longrightarrow q$”が真であることの証明です。この証明には，

直接証明「p を仮定して q を導く」

対偶法「$\overline{q}$ を仮定して $\overline{p}$ を導く」

の２つを学びます。しかし，背理法によって

「$\overline{q}$ を仮定したら p に矛盾した」

という誤った証明に陥りがちだということです。p は成り立っているとは限らないので，矛盾が生じません。正しくは，

「p であるのに q でない」を仮定して矛盾を導くことになります。条件文“$p \Longrightarrow q$”の否定は p かつ $\overline{q}$ であって，$\overline{q}$ でも $p \Longrightarrow \overline{q}$ でもありません。「ならば」の定義なしに“$p \Longrightarrow q$”が真であることを背理法で証明することはできないわけです。

ところが，問題集から次のような大学入試問題に至るまで，“$p \Longrightarrow q$”が真であることの背理法による証明問題が登場します。

問題３：(2011 福井県立大学)

> a，b，c，d を有理数，x を無理数とするとき，「$a+bx=c+dx$ ならば $a=c$ かつ $b=d$」が成り立つことを証明せよ。

こうした状況を考えると，「ならば」の指導体系が少しずつでも改善していくことが必要ではないでしょうか。あちらを立てればこちらが立たずの連鎖が生じて難しいところだとも感じますが，少なくとも

> 数学用語と日常用語の「ならば」は別のものであることを宣言すること。
>
> 数学用語の「ならば」を（たとえば⑤のような形で，なんらか）定義すること。

には共通理解が得られるのではないでしょうか。

§6. 結びにかえて

冒頭の問題１は，“仮定が偽の条件文は真”を用いなくても，次のように矛盾を導くことができます。（もちろん，選択肢の１つ１つに発言①を照らし合わせれば正解が得られますが）

仮に①が悪魔の発言だとすると，悪魔が，悪魔である自分を指して「私がもし天使なら」というのですからＢについてどう結論しようと嘘にはなりません。悪魔が嘘を付くことができないので条件に矛盾です。

嘘でない発言はすべて真実である。とは書かれていないので，悪魔が真実を語ったかどうかは定かではありません。もしかすると悪魔はＢの正体を知らずに冗談を飛ばしただけかもしれません。

《参考文献》

2005 年受験用全国入試問題正解（旺文社）

2011 年度全国数学入試問題詳解（聖文新社）

（東京都立立川高等学校）