誰でもできる平方完成
～途中過程より結果を重視して～

大関（おおせき）　浩二（こうじ）

§1. はじめに

2 次関数を学習するためには平方完成をマスターすることが必須条件です。しかし，生徒の中には次の 4 つの行程を習得することができないでいます。

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

たくさん練習することで覚える生徒がいる中で失敗を重ねるうちに諦めてしまう者もいます。今までは頂点の座標 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ を暗記させることはさせたくはありませんでした。同じ平方完成から得られる 2 次方程式の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を暗記させない教員は 1 人もいないのに。

§2. 結果を重視して

生徒が上の 4 つの行程をマスターし正しく変形できることを期待しています。だが，本校では，負の体験から諦める生徒が少なからず存在する。そこで，4 つの行程を次の等式を用いて半分に短縮することを考えてみました。ズバリ

$$ax^2+bx=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

です。しかも，この式を丸暗記させるのではなく，簡単に使えるようにしてみました。要は $\dfrac{b}{2a}$ と $\dfrac{b^2}{4a}$ を機械的に計算できれば良いのです。

2a，4a，b² を用意して

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & b & \overset{2\text{乗}}{\rightsquigarrow} & b^2\\
 & & \div & & \div\\
a & \xrightarrow{2\text{倍}} & 2a & \xrightarrow{2\text{倍}} & 4a\\
\hline
a & & \dfrac{b}{2a} & & \dfrac{b^2}{4a}
\end{array}
$$

【例題】

次の 2 次関数を平方完成せよ。

(1)　$y=2x^2-8x+5$

(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x$

(3)　$y=-x^2+(2a+4)x+b$

（2012 年センター試験・改題）

【解答】

(1)　係数の a，b を書いてからスタート

$$
\begin{array}{c}
 -8\\
\hline
2\quad\quad
\end{array}
\quad ☞ \quad
\begin{array}{ccccc}
 & & -8 & & \\
2 & \xrightarrow{2\text{倍}} & \mathbf{4} & \xrightarrow{2\text{倍}} & \mathbf{8}\\
\hline
\end{array}
$$

$$
☞ \quad
\begin{array}{ccccc}
 & -8 & \overset{2\text{乗}}{\rightsquigarrow} & \mathbf{64} \\
\hline
2 & 4 & & 8
\end{array}
\quad ☞ \quad
\begin{array}{ccc}
 & -8 & 64\\
 & \div & \div\\
2 & 4 & 8\\
\hline
2 & \mathbf{-2} & \mathbf{8}
\end{array}
$$

$$y=2(x-\mathbf{2})^2-\mathbf{8}+5=2(x-2)^2-3$$

(2)　矢印を省略して表記すると次のようになります。

$$
\begin{array}{ccc}
 & -3 & 9\\
-\dfrac{1}{2} & -1 & -2\\
\hline
-\dfrac{1}{2} & \mathbf{3} & -\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}
\end{array}
$$

$$y=-\frac{1}{2}(x+\mathbf{3})^2-\left(-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right)=-\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{9}{2}$$

(3)　文字係数でも大丈夫です。

$$\begin{array}{rrr} & 2a+4 & 4a^2+16a+16 \\ -1 & -2 & -4 \\ \hline -1 & \boldsymbol{-a-2} & \boldsymbol{-a^2-4a-4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y &= -\{x+(-a-2)\}^2-(-a^2-4a-4)+b \\ &= -(x-a-2)^2+a^2+4a+b+4 \end{aligned}$$

§3. おわりに

昔の CM ではありませんが『2 倍！，2 倍！』と『2 乗！』で準備ができます。後は『割る』だけで平方完成ができてしまいます。$\dfrac{b^2}{4a}$ を**引く**ことに注意して指導すれば，簡単な計算だけなので生徒たちは意欲的に練習し，できるようになります。私たちが途中過程の大切さに目をつぶれば誰でも平方完成の達人になれそうです。

（新潟県立新発田商業高等学校）