三角形・四面体の「重心座標」について

菅谷（すがや）　円博（みつひろ）

§0. はじめに

数研通信 52 号で「三角形のすべての線分比を 3 つの数で表す」を紹介させてもらったが，その後新しい切り口が見つかったので，見方を変えて改めて考察してみたい。(以前の数研通信も合わせてお読みいただきたい)

§1. 「重心座標」とは

△ABC の内部にある点Ｐについて

　　△PBC：△PCA：△PAB

の比は点Ｐの位置について一意に定まるので，この比を「△ABC の点Ｐにおける重心座標」といい，(△PBC，△PCA，△PAB) と表す。(図 1)

（点Ｐにおける面積比と呼んでもいいだろう）

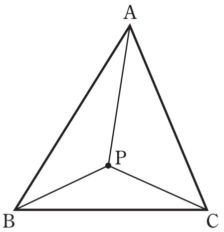


図 1

§2. 重心座標の性質

△ABC の点Ｐにおける重心座標を $(a,\ b,\ c)$ とする。すなわち，△PBC，△PCA，△PAB の面積をそれぞれ S_a，S_b，S_c とすると

　　$S_a : S_b : S_c = a : b : c$

また，AP と BC，BP と CA，CP と AB の交点をそれぞれ D，E，F とおく。(図 2)

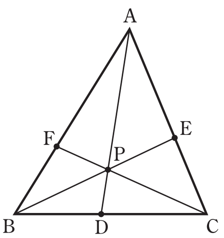


図 2

性質 3-1

BD：DC$=c : b$，CE：EA$=a : c$，AF：FB$=b : a$

証明 3-1

BD：DC$=S_c : S_b = c : b$ となる。残りの 2 つの比も同様である。

性質 3-2

AP：PD$=(b+c) : a$，BP：PE$=(c+a) : b$，CP：PF$=(a+b) : c$

証明 3-2

△ABC$=S=S_a+S_b+S_c$ とおくと

$S : S_a = (a+b+c) : a$

$S : (S_b+S_c) = (a+b+c) : (b+c)$

したがって

AP：PD$=(S_b+S_c) : S_a = (b+c) : a$

となり残りの 2 つの比も同様である。(図 3)

S との比較なしでも AP：PD$=(S_b+S_c) : S_a$ はいえるが，S と比較する方がわかりやすい。

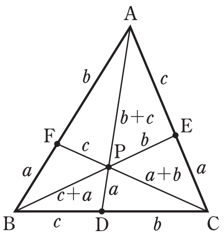


図 3

よって，重心座標の各値から，三角形のすべての線分比を 3 つの数を表すこと (これを 3 辺の「正規化」と呼ぼう) が可能となり，次の性質が成り立つ。

性質 3-4　$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$

性質 3-5　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$

また，点Ｐは △ABC の内部としたが，周上や外部においても比の一部を 0 や負の数とすることで重心座標の関係は成り立つ。(負の場合，外分になる)

§3. 三角形の五心の重心座標

参考までに五心の重心座標を掲げておく。

△ABC の 3 辺の長さを a，b，c，3 角の大きさを A，B，C で表し，D は AH と BC の交点とする。これらにより，五心におけるすべての線分の比が，正規化することによってただちに求められる。

(1) 重心Gの重心座標は (1，1，1)
　重心より 3 つの面積は等しい

(2) 内心Ｉの重心座標は $(a,\ b,\ c)$
　内接円の半径 r が高さとして同じ値になる

(3) 傍心 I_a の重心座標は $(-a,\ b,\ c)$
　内心の場合の比の１つを負にすると傍心となる

(4) 外心Ｏの重心座標は $(\sin 2A,\ \sin 2B,\ \sin 2C)$
　外接円の中心角の大きさで 3 つの面積が決まる

(5) 垂心Hの重心座標は $(\tan A,\ \tan B,\ \tan C)$

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\frac{\mathrm{AD}}{\tan B}:\frac{\mathrm{AD}}{\tan C}=\tan C:\tan B$$

　(ただし，直角・鈍角三角形は別証明)

§4. 重心座標の拡張

四面体 ABCD の内部の点Ｐにおいて，四面体 PBCD，四面体 PCDA，四面体 PDAB，四面体 PABC の体積比を「四面体 ABCD の点Ｐにおける重心座標」と定義する。(図 4)

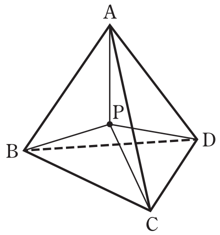


図 4

四面体 ABCD の点Ｐにおける重心座標を $(a,\ b,\ c,\ d)$ とする。すなわち，四面体 PBCD，四面体 PCDA，四面体 PDAB，四面体 PABC の体積をそれぞれ V_a，V_b，V_c，V_d とすると

$$V_a:V_b:V_c:V_d=a:b:c:d$$

また，AP と △BCD，BP と △CDA，CP と △DAB，DP と △ABC の交点をそれぞれ E，F，G，H とおく。(図 5)

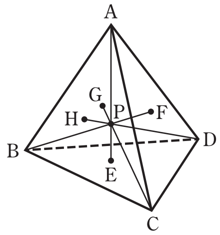


図 5

性質 4–1

△ABC の点Hにおける重心座標は $(a,\ b,\ c)$

証明 4–1

△HBC，△HCA，△HAB を底辺とし，頂点を D とする 3 つの四面体の体積はそれぞれ V_a，V_b，V_c の $\dfrac{\mathrm{DH}}{\mathrm{DP}}$ 倍であるので

$$\triangle\mathrm{HBC}:\triangle\mathrm{HCA}:\triangle\mathrm{HAB}=V_a:V_b:V_c=a:b:c$$

となり，△ABC のHにおける重心座標は $(a,\ b,\ c)$ である。(図 6)

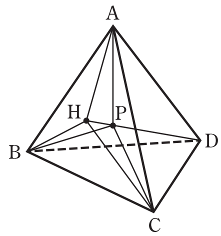


図 6

性質 4–2

$\mathrm{DP}:\mathrm{PH}=(a+b+c):d$

証明 4–2

四面体 ABCD の体積を $V=V_a+V_b+V_c+V_d$ とすると

$$V:V_d=(a+b+c+d):d$$

$$V:(V_a+V_b+V_c)=(a+b+c+d):(a+b+c)$$

　したがって

$$\mathrm{DP}:\mathrm{PH}=(V_a+V_b+V_c):V_d=(a+b+c):d$$

である。

ここで，AH と BC，BH と CA，CH と AB の交点をそれぞれ I，J，K とおく。

性質 4–3

△AID の点Ｐにおける重心座標は

$$(a,\ b+c,\ d)$$

証明 4-3

△ABC の点Hにおける重心座標は $(a,\ b,\ c)$ より $\mathrm{AH}:\mathrm{HI}=(b+c):a$

また，$\mathrm{DP}:\mathrm{PH}=(a+b+c):d$ であるので，△AID で正規化すれば，△AID の点Pにおける重心座標は $(a,\ b+c,\ d)$ となる。(図 7)

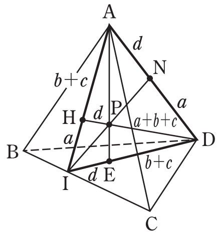


図 7

性質 4-4　$a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b\overrightarrow{\mathrm{BP}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}+d\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$

性質 4-5　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}+d\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{a+b+c+d}$

簡潔のために △ ABC しか記述していないが，他の 3 つの三角形と，△AID のような点Pを含む内部にある 6 つの三角形についても線分比は正規化でき，いずれも同様の性質がある。

ここで，一般に線分 XY 上の点 Z について，XZ，ZY を点 X における内線分，外線分と名付ける。

AF と CD，AG と DB，CF と AD の交点をそれぞれ L，M，N とすると，点Aにおける外線分となる KB，HI，JC，FL，ND，GM の 6 本と線分 PE の正規化した値はいずれも a となる。(図 8)

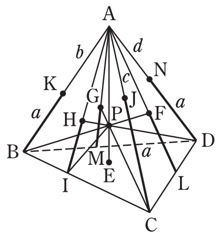


図 8

また，AP の正規化された値は，点Aの 3 本の内線分 AK，AJ，AN の比の和の $b+c+d$ になっている。(図 9)

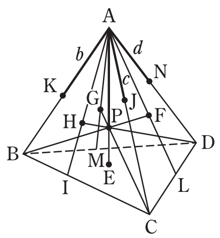
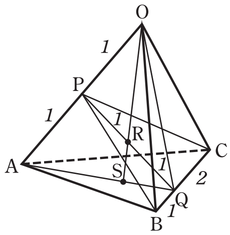


図 9

§5. 問題の応用例

> **例 1**　四面体 OABC の OA の中点を P，BC を 1 : 2 に内分する点を Q，PQ の中点を R，OR と平面 ABC との交点を S とするとき，OR : OS を求めよ。



まず，与えられた線分比が 2 つ出てくる三角形を探すと，△PBC と △OAQ とがあるが，△OAQ の R における重心座標は (1，1，2) であり，実は，これだけで $\mathrm{OR}:\mathrm{OS}=3:(3+1)=3:4$ とわかってしまう。(図 10)

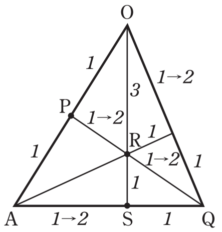


図 10

△PBC の R における重心座標は (3，2，1) である。(図 11)

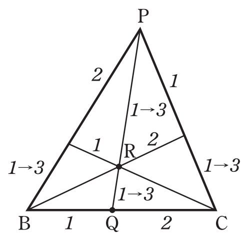


図 11

ここで，両方に共通している PR : RQ に着目すると，△OAQ の方は $\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=2:2$ だが，△PBC の方は $\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=3:3$ であるので，△OAQ の重心座標は 3 倍して (3，3，6)，△PBC の重心座標は 2 倍して (6，4，2) とする。(図 12)

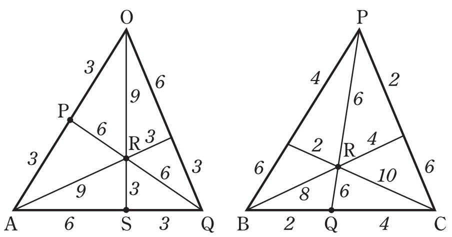


図 12

以上のように「正規化」すると四面体OABCの重心座標は(3，3，4，2)となる。このことからも

OR：OS＝(3＋4＋2)：(3＋3＋4＋2)＝9：12＝3：4 とわかる。(図13)

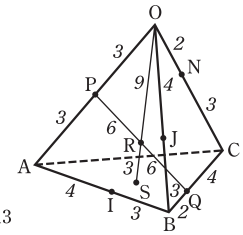


図13

§6. おわりに

重心座標という切り口で眺めたら，証明もほとんど自明といえるほどわかりやすくなり，しかも四面体まで拡張できたことは驚かされた。見方を変えるということが数学的思考の中でいかに重要であるかが改めて思い知らされた。

また，三角形の五心に関しては難しい計算式もいらず高校生でも理解できるのではないだろうか。例えば，「△ABCの外心Oについて，AOとBCの交点をDとしたとき，BD：DC＝$\sin 2C$：$\sin 2B$であることを証明せよ」などの問題も指導できると思われる。

最後に，三角形，四面体と拡張してきたが，同じ考え方で5個の四面体で囲まれた四次元の超立体についても重心座標の考え方が成り立つのではないかと予想してこの稿を終わりにしたい。

《参考文献》

Wikipedia「三角形の中心」4 三線座標と重心座標

(山梨県立富士河口湖高等学校)