モローの不等式の証明

ふじおか　まさと
藤岡　優太

§1. モローの不等式

同僚のＴ先生から，

「不等式

☆ $\dfrac{e}{2n+2}<e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{e}{2n+1}$ （n は自然数）☆

をスッキリ示せないか」と問われました。上記の不等式を **モローの不等式** というそうです。

モローの不等式をできるだけスッキリ証明してみたいと思います。

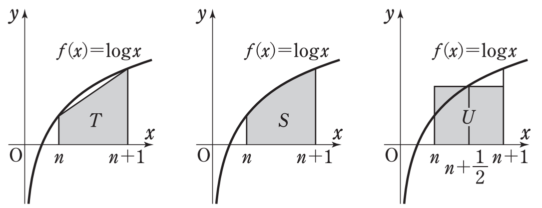
§2. モローの不等式の証明

☆ $\dfrac{e}{2n+2}<e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{e}{2n+1}$ （n は自然数）☆

を考える代わりに

★ $\dfrac{2n}{2n+1}e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{2n+1}{2n+2}e$ （n は自然数）★

を考えることにしましょう。



上図の網掛部分の面積 T，S，U は，

$$
★\ \begin{cases} T=\dfrac{\log n+\log(n+1)}{2} \\ S=\displaystyle\int_n^{n+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_n^{n+1} \\ \quad=(n+1)\log(n+1)-n\log n-1 \\ U=\log\left(n+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}\ ★
$$

であり，図より $T<S<U$ が成り立ちます。

さらに $\begin{cases} 2T<2S \\ -U<-S \end{cases}$ から

★★ $2T-U<S<U$ ★★

が成立し，★，★★より

$$
\log\frac{n(n+1)}{n+\frac{1}{2}}<(n+1)\log(n+1)-n\log n-1
$$
$$
<\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\ \cdots\cdots(*)
$$

が成り立ちます。

したがって，自然数 n に対し

$$
(*)\iff\log\frac{n(n+1)}{n+\frac{1}{2}}+1<(n+1)\log(n+1)
$$
$$
-n\log n<\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+1
$$
$$
\iff\log\frac{n(n+1)e}{n+\frac{1}{2}}<\log\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}
$$
$$
<\log\left(n+\frac{1}{2}\right)e
$$
$$
\iff\frac{n(n+1)e}{n+\frac{1}{2}}<\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}<\left(n+\frac{1}{2}\right)e
$$
$$
\iff\frac{n}{n+\frac{1}{2}}e<\frac{(n+1)^n}{n^n}<\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}e
$$
$$
\iff\frac{2n}{2n+1}e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{2n+1}{2n+2}e
$$

となります。

（高知県　土佐高等学校）