節約型の立体は

松田(まつだ)　康雄(やすお)

§0. はじめに

次の問題は現実とつながる問題である。(〔3〕等)

> **問題１．** 体積が一定である直円柱の表面積を最小にするには，高さと半径の比をどのようにすればよいか。

例えば直円柱の缶詰を作るとすると，表面積が小さいということは材料費が少なくて済むということである。

後で示すように，問題１を微分で解く場合，分数関数が出てきて，これは一般の文系の生徒は学ばない内容である。そこで，微分を避けて，次の相加平均・相乗平均の関係を使って解く方法を考えた。

『a，b，$c>0$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

等号成立は，$a=b=c$ のときに限る。』

本稿では以下の用語を用いる。

底面が互いに相似で体積が一定の直柱のうち表面積が最小のものを「節約型の（立体名）」，底面が互いに相似で容積が一定の直柱型の箱のうち表面積が最小のものを「節約型の箱」と呼ぶ。

(底面積)：(側面積)＝1：4　　　…①

となる直柱を，立方体の展開図から連想して「立方体型の（立体名）」と呼ぶ。

(底面積)：(側面積)＝1：2　　　…②

となるふたのない直柱の箱を，日本古来の升の形にちなんで「升型の箱」と呼ぶ。(〔4〕)

本稿では，相加平均・相乗平均の関係を使って，節約型の立体と箱に関わる問題を考える。

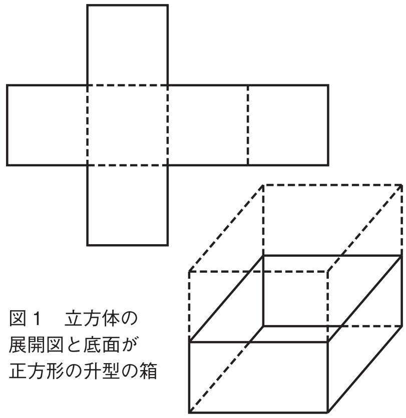

図１　立方体の展開図と底面が正方形の升型の箱

§1. 問題１の解法

まず微分を使った解法を示す。

解法１．

直円柱の体積を V，材料費を S，底面の円の半径を x，高さを h とする。

$$V=\pi x^2 h\ (＝一定),\quad S=2\pi x^2+2\pi xh$$

$h=\dfrac{V}{\pi x^2}$ より，$S=2\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$

x で微分して，$S'=4\pi x-\dfrac{2V}{x^2}$

$x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のとき，$S'=0$ となり，S は極小かつ最小となる。このとき，$h=2x$ となる。よって，高さと半径の比は 2：1 である。　□

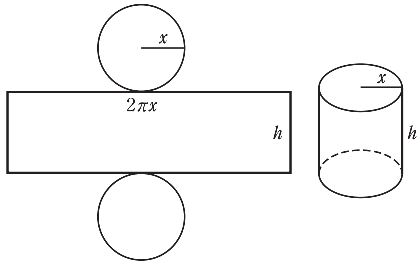

図２　直円柱の展開図

$h=2x$ なので，問題1の答の直円柱は，正面から見ると，正方形に見える直円柱，と言える。

次に，相加平均・相乗平均の関係を使った方法を示す。

解法2.

$$S=2\pi x^2+\pi xh+\pi xh \quad \cdots③$$

と変形する。相加平均・相乗平均の関係から

$$S \geqq 3\sqrt[3]{2\pi x^2 \cdot \pi xh \cdot \pi xh}=3\sqrt[3]{2\pi^3 x^4 h^2}$$
$$=3\sqrt[3]{2\pi V^2} \ (=\text{一定})$$

S が最小となるのは等号が成り立つときなので③から，$2\pi x^2=\pi xh$ より $h=2x$ のときである。よって，高さと半径の比は $2:1$ である。 □

解法2の③は

$S=$(底面積の2倍)+(側面積の半分)×2

を表す。S が最小となるのは

(底面積の2倍)=(側面積の半分)

のときなので①が成り立つときである。

問題1から，節約型の直円柱は立方体型の直円柱と言える。

§2. 節約型の直柱

問題1を直柱の場合に拡張する。

> **問題2.** 底面が互いに相似で体積が一定の直柱のうち，表面積が最小となる直柱（節約型の直柱）はどのようなものか？

解答.

体積を V，表面積を S とする。底面が互いに相似なので，底面の周の長さを x とすると，底面積は kx^2（k は定数）と表される。高さを h とすると，側面積は xh となる。

$$V=kx^2h \ (=\text{定数}),$$
$$S=2kx^2+xh=2kx^2+\frac{1}{2}xh+\frac{1}{2}xh$$

として，相加平均・相乗平均の関係から

$$S \geqq 3\sqrt[3]{2kx^2 \cdot \frac{1}{2}xh \cdot \frac{1}{2}xh}=3\sqrt[3]{\frac{k}{2}x^4h^2}$$
$$=3\sqrt[3]{\frac{V^2}{2k}} \ (=\text{定数})$$

が成り立つ。表面積が最小となるのは等号が成り立つときなので

$$2kx^2=\frac{1}{2}xh \ \text{より} \ 4kx^2=xh$$

のとき，すなわち，①のときである。したがって，節約型の直柱は，立方体型の直柱である。 □

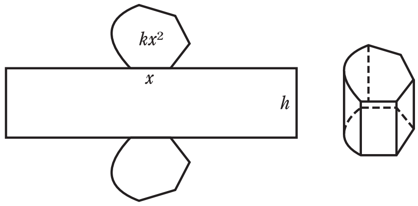

図3　直柱の展開図

§3. 節約型の直方体

授業で使っている教科書に次の問題があった。(〔1〕)

> **問題3.** 容積が 1440 cm^3 の直方体の（ふたがある）箱を作りたい。材料費は，一定面積当たり底面と側面が上面の1.5倍である。材料費を最も安くするにはどのように作ればよいか。

本校の3年生に教える偏微分の問題である。問題3を一般化して，相加平均・相乗平均を使って解いてみる。

> **問題4.** 体積が一定の直方体を考える。上底面，下底面，側面の材料費をそれぞれ単位面積当たり a，b，c とする。材料費が最も安くなるのはどのような直方体か。

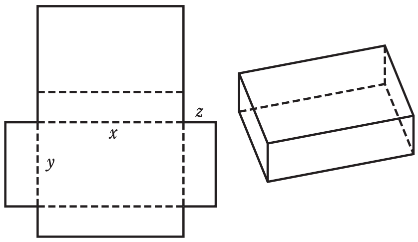

図4　直方体の展開図

問題4の解答.

直方体の体積を V，底面の長方形の隣り合う2辺の長さを x，y，高さを z，材料費を S とする。

$$V=xyz \ (=\text{定数})$$
$$S=(a+b)xy+2cyz+2czx \quad \cdots④$$

となる。相加平均・相乗平均の関係から

$$S \geqq 3\sqrt[3]{(a+b)xy \cdot 2cyz \cdot 2czx}$$
$$=3\sqrt[3]{4(a+b)c^2x^2y^2z^2}$$
$$=3\sqrt[3]{4(a+b)c^2V^2} \ (=\text{定数})$$

が成り立つ。材料費が最も安くなるのは等号が成り立つときなので，④から

$$(a+b)xy=2cyz=2czx,\quad \frac{2c}{x}=\frac{2c}{y}=\frac{a+b}{z}$$

より

$$x:y:z=2c:2c:(a+b) \qquad \cdots⑤$$

のときである。すなわち，底面が正方形で，高さが底面の正方形の1辺の長さの $\dfrac{a+b}{2c}$ 倍の直方体のときである。これは，上下底面が正方形で，その材料費の合計の2倍と，側面の材料費が同じになるときである。 □

特に，$a=b=c$ のとき，$x=y=z$ となって，問題4の答は立方体となる。

問題3の解答.

問題4で，$a=1$，$b=c=1.5$ のときなので，底面が正方形で，高さが底面の正方形の1辺の長さの $\dfrac{5}{6}$ 倍の直方体のときである。$V=1440$ なので，底面が1辺12 cmの正方形で，高さが10 cmの直方体となるように作ればよい。 □

§4. 節約型のふたのない箱

次にふたのない直方体の箱の場合を考えよう。

> **問題5.** 容積が一定なふたのない直方体の形の箱で，表面積が最小となるのはどのようなものか？

解答.

問題4と同じ記号を使う。ただし，表面積を S とするが，これは表面積の裏表合計の半分とする。⑤で，$a=0$，$b=c=1$ として

$$x:y:z=2:2:1$$

のときである。すなわち，底面が正方形で，高さが底面の正方形の1辺の長さの半分の直方体のときである。このとき②が成り立つので，節約型の直方体の箱は，升型の箱である。 □

問題5を拡張する。

> **問題6.** 底面が互いに相似で体積が一定のふたのない直柱の箱のうち，表面積が最小となるのはどのようなものか？

問題2の解法と同様に，②が成り立つ箱であることが示される。したがって，ふたのない節約型の直柱の箱は升型の箱である。

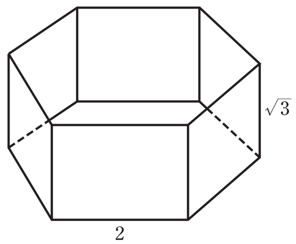

図5　升型の正六角柱の箱

§5. おわりに

今回の問題は現実とつながる問題であった。微分を使って解くことが基本である。しかし，相加平均・相乗平均の関係を用いたので，底面積と側面積の関係という新たな視点が得られたと思う。

《参考文献》

〔1〕 田代嘉宏，難波莞爾編，新編高専の数学3［第2版・新装版］，森北出版，2012年
〔2〕 松田康雄，最大最小問題考，数研通信　数学 No.37，2000年，pp.24－25
〔3〕 高等学校数学教科書，数学Ⅲ，数研出版，2014年
〔4〕 ウィキペディア，京桝

（福岡県　久留米工業高等専門学校）