# 複素数と平面幾何

山田　一男（やまだ　かずお）

## §1. はじめに

視力に自信のない私は，図による説明・証明に対する若干の違和感を持っていましたが，数研通信 81 号の西元先生の円周角の定理に関する解析的な議論を読ませていただき，自分だけではないのだと思い，共感を覚えました。そこで，ずいぶん前の指導要領で，現行より複素数の扱いが重かった当時のことを思い出し，古い書物を探せば記載はあるでしょうが，複素数を用いて，この円周角の定理を考えてみました。

すなわち，異なる 3 点 $a$，$b$，$c$ で円が決定されるとし，反時計回りにこの順に位置し，点 $d$ は点 $a$，$b$ とは一致しないとすると，円周角の定理は

「$\angle acb=\angle adb$ または $\angle adb-\pi$」

⇔「4 点 $a$，$b$，$c$，$d$ が同一円周上にある」

です。ただし，記号 $\angle pqr$ とは線分 $qp$ を $q$ を中心として反時計回りに回転し線分 $qr$ またはその一部分に重なるときの角とし，$0\leqq\angle pqr<2\pi$ とする。

後で確認するが，点 $a$，$b$，$c$ の位置関係より，

$0<\angle acb<\pi$ …(＊)　が成り立つ。

## §2. 証明

条件「$\angle acb=\angle adb$ または $\angle adb-\pi$」を複素数で表すと，絶対値が 1 の複素数は回転を表すから

$$\frac{a-c}{b-c}\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=\pm\frac{a-d}{b-d}\left|\frac{b-d}{a-d}\right|$$

すなわち

$$\frac{b-d}{a-d}\,\frac{a-c}{b-c}=\pm\left|\frac{b-d}{a-d}\,\frac{a-c}{b-c}\right| \quad\cdots\cdots①$$

また，条件「4 点 $a$，$b$，$c$，$d$ が同一円周上にある」は，$c$ が 1 に，$b$ が 0 に，$a$ が∞に移る 1 次分数変換 $f$ を考えることにより，$d$ の移り先 $f(d)$ が実数であることと同値である。その 1 次分数変換 $f$ は，

$$f(d)=\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}=\frac{b-d}{a-d}\,\frac{a-c}{b-c}$$

だから，$\dfrac{b-d}{a-d}\,\dfrac{a-c}{b-c}$ は実数である。……②

①と②は同値だから，

「$\angle acb=\angle adb$ または $\angle adb-\pi$」

⇔「$\dfrac{b-d}{a-d}\,\dfrac{a-c}{b-c}=\pm\left|\dfrac{b-d}{a-d}\,\dfrac{a-c}{b-c}\right|$」

⇔「$\dfrac{b-d}{a-d}\,\dfrac{a-c}{b-c}$ は実数」

⇔「4 点 $a$，$b$，$c$，$d$ が同一円周上にある」

である。

最後の同値性⇔は 1 次分数変換の周知の事実を用いたが，その事実は指導要領内での説明・計算で直接示すことができるので，次で示します。

## §3. 計算（その 1）

$f(d)=\dfrac{b-d}{a-d}\,\dfrac{a-c}{b-c}$ の値は平行移動，拡大縮小，回転で変化しないので，異なる 3 点 $a$，$b$，$c$ で決まる円 $C$ は原点中心で半径 1 として計算してもよい。

$$\frac{b-d}{a-d}\,\frac{a-c}{b-c}-\overline{\frac{b-d}{a-d}\,\frac{a-c}{b-c}}$$
$$=\frac{(a-c)(a-b)}{(b-c)(a-d)(1-a\overline{d})}(d\overline{d}-1)$$

が成り立つから，最後の同値性⇔は示される。

これで円周角の定理の証明は完了ですが，もう少し詳しく，円周上の 3 点 $a$，$b$，$c$ と点 $d$ との位置関係を調べると，実数 $f(d)$ の正負で決まります。

「$\angle acb=\angle adb$」⇔「$f(d)>0$」

「$\angle acb=\angle adb-\pi$」⇔「$f(d)<0$」

その指導要領内での計算を次にします。

## §4. 計算（その 2）

§1. 内の(＊)について，3 点 $a$, $b$, $c$ が円周上に反時計回りにこの順で位置することを複素数で言えば，

$a=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$b=\cos\beta+i\sin\beta$，$c=\cos\gamma+i\sin\gamma$

$0\leqq\alpha<\beta<\gamma<2\pi$

とおけるから，三角関数の和・差と積の入れ替えを用いて，

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{\cos\beta-\cos\gamma+i(\sin\beta-\sin\gamma)}{\cos\alpha-\cos\gamma+i(\sin\alpha-\sin\gamma)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left(-\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+i\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}+i\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\pi+\beta+\gamma}{2}+i\sin\frac{\pi+\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\pi+\alpha+\gamma}{2}+i\sin\frac{\pi+\alpha+\gamma}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

$\frac{b-c}{a-c}$ の虚部が正であることにより　$0<\angle acb<\pi$

また，今と同様の計算で，実数

$f(d)=\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}$ と円周上の 4 点 $a$，$b$，$c$，$d$ の位置関係がもう少し詳しく分かる。$d$ を

$d=\cos\delta+i\sin\delta$，$\alpha<\delta<\alpha+2\pi$ とおく。

実数 $\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}$ の値は同様の計算で，

$$\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}=\frac{\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\delta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

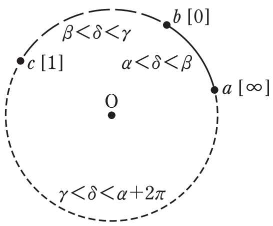
が成り立つから，

$\alpha<\delta<\beta$ のときは，$\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}<0$

$\beta<\delta<\gamma$ のときは，$0<\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}<1$

$\gamma<\delta<\alpha+2\pi$ のときは，$1<\frac{b-d}{a-d}\frac{a-c}{b-c}$

となり，円周上の 4 点 $a$，$b$，$c$，$d$ の位置関係がわかる。




最後の $\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\frac{\sin\frac{\beta-\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}$ と 1 との大小については，先と同様，三角関数の和・差と積の入れ替えの練習問題のような式変形で次の等式が得られます。

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\frac{\sin\frac{\beta-\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}-1=\frac{\sin\frac{\delta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}$$

だから，$\delta$ と $\gamma$ の大小で正負が決まります。

もっとも，$\frac{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\frac{\sin\frac{\beta-\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}$ を $\delta$ で微分し，増加することを確認した方が楽で，すべての実数値をとることも分かります。

## §5. おわりに

「行列」を履修する前の指導要領下では,「複素数」の授業の中で，こんな計算も扱われていたと思います。現指導要領で複素数が復活し，平面幾何の定理がすべて，複素数で証明することができるようになり，定理を解析的に捉え直してみることは教員側だけでなく，生徒にとっても面白いと思います。

計算結果が図に反映し，逆に，図から計算結果を予測し，その整合性を確認することでより理解が深まります。(ただ余程，時間と気力がないと，単純な計算作業には耐えられないかもしれませんが，PC に数式処理させては，達成感が無くなるし……)

教材としての平面幾何に期待される見方・考え方とは若干のズレはあるかもしれませんが，誤解を恐れずに言えば，ある意味「高校数学は操作」だから，平面幾何も方程式を解いたり，等式を証明したりといった代数的な計算だと捉え，力ずくで解くのも 1 つの方法だと思います。もっとも，この力ずくの計算を避けるために図があり，どの程度まで図に頼るかは見解が分かれるところだと思いますが，直線がまっすぐに見えなくなって久しいわが身には，特に気になるところです。

(愛知県立杏和高等学校)