重複組合せの現代的解法

鹿野(かの)　和宏(かずひろ)

§1. はじめに

解答の難解さからか，重複組合せの教科書での扱いは，研究問題とする場合と，全く触れていない場合に分かれています。また，教えた生徒の中には，解法への疑問をもつ子も少なくありませんでした。

本稿では，授業での実践を通して構築した解法の工夫とその成立過程を紹介します。

§2. 重複組合せ～従来の解法～

重複組合せとは，異なる n 個のものから重複を許して合計 r 個取る組合せの総数のことです。一般に，次の式で求まります。

$$ {}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r $$

> **【例題１】**
> ３種類の果物，りんご，なし，みかんから重複を許して５個選んで買う組合せの総数は何通りか。

【解法１】 新編数学Ａ p.29

果物を○，仕切りを｜として，５個の○と２本の｜を１列に並べ，１本目の｜より左にある○の個数をりんごの個数，１本目と２本目の｜の間にある○の個数をなしの個数，その他の○の個数をみかんの個数とすれば，買い方の総数は，○と｜の並べ替えの総数と一致する。合計７つの○と｜のうち，５個の○の場所を決めればよいので，求める場合の数は，

${}_7C_5=21$（通り）（${}_7C_2$ でもよい）

※具体例

(りんご，なし，みかん)	○と｜
5，　0，　0	○○○○○｜｜
4，　1，　0	○○○○｜○｜
3，　1，　1	○○○｜○｜○

現在は解法１の指導実践が多いと思います。○と｜の並べ方とみなすことで組合せ（同じものを含む順列）に帰着できるため，一度理解すれば応用問題への活用も容易です。しかし，初見の生徒からは，「なぜ○と｜を使うのか分からない」という根本的な問題が生じてきます。この言葉は，

①　○と｜への変換ができない（抽象化が苦手）
②　なぜ仕切りの概念を導入するか分からない
　　（不自然または不可思議な発想と感じる）

という２つの疑問を内包しています。①を解消するためには，より直感的に分かりやすい記号への変換が必要でしょう。そして，②を解消するためには，「果物を５個買う」という状況に則した発想が必要となります。①と②を同時に満たす解法を模索し，高校１年生を対象に実践した結果，多分に‘現代的’な解法が出来上がりました。生徒に感謝です。

§3. 現代的解法

「タッチパネルに果物と矢印が映っている。」

という設定だけ（図は描かずに）提示したところ，例題１の考え方として次のような意見が出ました。

①最初の画面はりんごにしておこう。
②買うなら↑をタッチするだろう。（減らすのは↓）
③果物の変更は→だね。（戻るのは←）
④→は，なし，みかんに変える２回押せばいい。
⑤購入ボタンはどうする？
　⇒どうせ最後だから考えなくていいか。
⑥押し間違えたらどうしよう…
　⇒面倒だから絶対間違えない。そうしよう。

これらを基にしたものが，次の解法です。

【解法２】

りんご，なし，みかんの順に買うとして，果物を１個買うことを↑で，買う果物を変えることを→で表すと，果物３種類を合計５個買う方法の総数は，↑５個，→２個，計７個の並べ替えの総数とみなせ，そのうち５個の↑の場所を決めればよいので，

$${}_7C_5=21$$ （通り）

※具体例

(りんご，なし，みかん)			↑と→
5，	0，	0	↑↑↑↑↑→→
4，	1，	0	↑↑↑↑→↑→
3，	1，	1	↑↑↑→↑→↑

ほぼ，従来の解法と変わりません。異なる点は，

①生徒はタッチパネル操作を日常的に行っている。

②増減を↑↓，改頁を←→と表すことが自然である。

③↑と→の並べ替えは直近の格子路上の最短経路問題で扱っている。

などで，生徒たちにとっては受け入れやすい方法のようです。

§4. 発展と応用

実際の授業では25分程度の余裕があったので，整数問題への応用を試みました。

【例題２】

次の条件を満たす非負整数（0以上の整数）$(a,\ b,\ c)$の組は何通りあるか答えなさい。

(1) $a+b+c=6$

(2) $a+b+c\leqq 6$

(3) $a+b+c\leqq 6,\ a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1$

(4) $3\leqq a+b+c\leqq 6$

【略解】

(1) ↑６個→２個，計８個の並べ替えで ${}_8C_2$

(2) ↑０～６個→２個，計２～８個の並べ替えで

$${}_8C_2+{}_7C_2+{}_6C_2+{}_5C_2+{}_4C_2+{}_3C_2+{}_2C_2$$

【別解】

選択終了の→を追加し，↑６個→３個，計９個の並べ替えで ${}_9C_3$

(3) 先に↑１個ずつを各文字に割り振れば，残る↑３個→３個，計６個の並べ替えで ${}_6C_3$

(4) ↑３～６個，→２個，計５～８個の並べ替えで

$${}_8C_2+{}_7C_2+{}_6C_2+{}_5C_2$$

【別解】

(2)から $a+b+c\leqq 2$ の場合，↑２個→３個，計５個の並べ替えを除いて ${}_9C_3-{}_5C_3$

ヒントなしで生徒たちが考えられたのは(1)，(2)，(4)まで。(3)と別解は誘導なしでは思いつきませんでした。(1)，(2)は苦もなく解けていたため，重複組合せの概念は掴めたようです。

§5. おわりに

タッチパネル操作は，生徒にとって簡単でなじみやすい方法だったようです。

今後はICT活用教育と併せて，他の問題・単元においても，より直感的に理解しやすい解法とその発見学習的授業が構築されうると思います。

《参考文献》

〔１〕 新編数学Ａ　数研出版　2011年

（埼玉県　浦和実業学園高等学校）