

# 三角関数の「和と積の公式」の扱いについて

さ さ き ま さ と し  
佐々木 正敏

## §1. 目的

数学Ⅱ「三角関数」の「和と積の公式」、いわゆる「積を和または差に直す公式」と「和または差を積に直す公式」は、加法定理の変形、おき換えで得られる派生公式だが、公式の結果だけを覚えて使おうとするためか、なかなか定着しない。利用の度に公式を導いて当てはめる方法もあるが、この公式から離れて加法定理だけで処理をすることが考えられてよい。

## §2. 加法定理を直接用いる変形

正弦と余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

は多くの生徒が十分に習熟しているから、これをそのまま利用することを考える。

### (1) 積 → 和または差

与えられる式は、 $\sin\alpha\cos\beta$ 、 $\cos\alpha\sin\beta$ 、 $\cos\alpha\cos\beta$ 、 $\sin\alpha\sin\beta$ の4式のいずれか。

たとえば $\sin 3\theta\cos\theta$ が与えられたとき、これは①と②の $\sin\alpha\cos\beta$ の形にあたるから、 $\cos\alpha\sin\beta$ すなわち $\cos 3\theta\sin\theta$ を、与えられた積に足したものと引いたものを加えて $\frac{1}{2}$ 倍すればよい。すなわち

$$\begin{aligned}\sin 3\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}\{(\sin 3\theta\cos\theta+\cos 3\theta\sin\theta) \\ &\quad +(\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(3\theta+\theta)+\sin(3\theta-\theta)\} \\ &= \frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)\end{aligned}$$

が得られる。

$\sin 3\theta\sin\theta$ であれば、 $\cos 3\theta\cos\theta$ を利用する。

$$\begin{aligned}\sin 3\theta\sin\theta &= \frac{1}{2}\{-\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta\} \\ &\quad +(\cos 3\theta\cos\theta+\sin 3\theta\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}\{-\cos(3\theta+\theta)+\cos(3\theta-\theta)\} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 4\theta-\cos 2\theta)\end{aligned}$$

### (2) 和または差 → 積

与えられる式は、 $\sin\alpha+\sin\beta$ 、 $\sin\alpha-\sin\beta$ 、 $\cos\alpha+\cos\beta$ 、 $\cos\alpha-\cos\beta$ の4式のいずれか。この場合は、和が $\alpha$ で、差が $\beta$ の2数を用いればよい。

たとえば $\sin 3\theta+\sin\theta$ が与えられたときは、和が $3\theta$ で、差が $\theta$ になる2数を求める。 $2\theta$ と $\theta$ が当てはまるから、

$$\begin{aligned}\sin 3\theta+\sin\theta &= \sin(2\theta+\theta)+\sin(2\theta-\theta) \\ &= (\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta) \\ &\quad +(\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta) \\ &= 2\sin 2\theta\cos\theta\end{aligned}$$

と変形すればよい。

数学Ⅲで三角関数の導関数を求める際に

$\sin(x+h)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$ の変形が

必要になるが、これは $\left(x+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}=x+h$ 、

$\left(x+\frac{h}{2}\right)-\frac{h}{2}=x$ だから

$$\begin{aligned}\sin(x+h)-\sin x &= \sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right) \\ &= \left\{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\frac{h}{2}+\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right\} \\ &\quad -\left\{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cos\frac{h}{2}-\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right\} \\ &= 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\end{aligned}$$

から得られる。

(東京都立三田高等学校)