三角関数の恒等式と三角形の面積公式との関係

石原　諭（いしはら　さとし）

§1. はじめに

数研通信 No.80 の「$\sin A+\sin B+\sin C$ から見えるもの」を読み，三角関数の恒等式の証明問題を三角形と関連付けて考えるという鈴木崇裕先生の問題提起に大変興味をもちました。鈴木先生は公式から非常に多くの図形的性質を導き出しており，素晴らしいの言葉に尽きます。今回は同じ問題提起を三角形の面積と関連付けて自分なりに考えてみました。授業の合間の小ネタのような感じで，既出のものばかりかもしれませんがご容赦ください。

§2. 4つの恒等式

以下，A，B，C は △ABC の内角を表すとする。
よって　$A+B+C=\pi$
また $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$，外接円の半径を R とする。
扱う恒等式は以下である。

① $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

② $a\cos A+b\cos B+c\cos C$
$=4R\sin A\sin B\sin C$

③ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

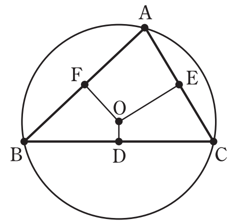
④ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

これらを三角形の面積と関連付けて説明する。

① $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$
について

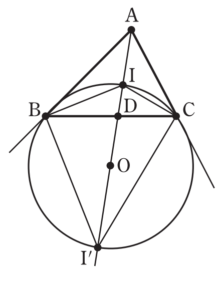
これは簡単で，よく知られている三角形の面積公式 $S=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$ と
$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ を連立すれば
$\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=2R^2\sin A\sin B\sin C$
この両辺を $\frac{R^2}{2}$ で割ることで①を得る。(**終**)

② $a\cos A+b\cos B+c\cos C$
$=4R\sin A\sin B\sin C$ について



△ABC の外心Oが三角形の周上または内部にある場合を考え，図のようにOから BC，CA，AB に垂線 OD，OE，OF を下ろし，その垂線の長さをそれぞれ h_a，h_b，h_c とすれば三角形の面積 S は $S=\frac{1}{2}(ah_a+bh_b+ch_c)$ と表されるが，
$\angle\mathrm{BOD}=\angle\mathrm{A}$ より，△OBD に着目して
$h_a=R\cos A$ であり，同様に $h_b=R\cos B$
$h_c=R\cos C$ となるから代入すると
$S=\frac{1}{2}R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$ となる。
これと $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ より
$\frac{1}{2}R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$
$=2R^2\sin A\sin B\sin C$
これを整理して②を得る。Oが三角形の外部にある場合は垂線の長さをその向きに応じて正負の長さをもつものとし，また面積もそれに応じて符号付き面積を考えることで同じように説明できる。(略)(**終**)

③ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
について



図において △ABC の内心を I，傍心を I′ とする。
③は三角形の面積公式
$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$
$=\frac{abc}{4R}$　……(ア)

と関係があると考えられる。
(ア)の左辺を次のように変形する。

$$(\text{アの左辺})=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$
$$=\frac{1}{2}r(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)$$
$$=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

一方，右辺は図の△IBCとその外接円（半径はR_aとする）に着目して正弦定理より

$$a=\mathrm{BC}=2R_a\sin\left(\pi-\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)=2R_a\cos\frac{A}{2}$$

である。同様にして△ICA，△IACの外接円の半径をそれぞれR_b，R_cと定めれば

$$b=2R_b\cos\frac{B}{2},\ c=2R_c\cos\frac{C}{2}$$

となるので，これらを(ア)の右辺に代入して

$$(\text{アの右辺})=\frac{abc}{4R}$$
$$=\frac{1}{4R}2R_a\cos\frac{A}{2}\cdot 2R_b\cos\frac{B}{2}\cdot 2R_c\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ \text{となる。}$$

以上より，等式(ア)は

$$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=\frac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\quad\cdots\cdots(\text{イ})\ \text{となる。}$$

ここで△IBCの外接円は線分ADをAB：BDに分けるアポロニウスの円であることに着目すれば，アポロニウスの円の半径の公式より，

$R_a=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DA}}{|\mathrm{AB}^2-\mathrm{BD}^2|}$ である。これに $\mathrm{AB}=c$，

$\mathrm{BD}=\dfrac{ac}{b+c}$ と，角の二等分線の公式より得られる

$$\mathrm{DA}=\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}-\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}}$$
$$=\sqrt{bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}}$$
$$=\frac{\sqrt{bc}\sqrt{a+b+c}\sqrt{b+c-a}}{b+c}$$

を代入して計算すると

$$R_a=\frac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}=\frac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}$$

を得る。$\left(\text{ただし } s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

同様に $R_b=\dfrac{\sqrt{a}\,b\sqrt{c}}{2\sqrt{s(s-b)}}$，$R_c=\dfrac{\sqrt{ab}\,c}{2\sqrt{s(s-c)}}$ を得るので，これらを(イ)に代入すると

$$(\text{イの右辺})=\frac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{2}{R}\cdot\frac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}\cdot\frac{\sqrt{a}\,b\sqrt{c}}{2\sqrt{s(s-b)}}\cdot\frac{\sqrt{ab}\,c}{2\sqrt{s(s-c)}}$$
$$\times\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{a^2b^2c^2}{4Rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=\frac{a^2b^2c^2}{4RSs}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

さらに $S=\dfrac{abc}{4R}$，$r=\dfrac{S}{s}$ を使うと

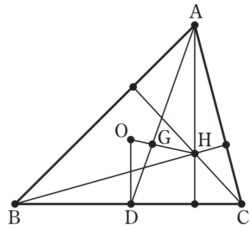
$$(\text{イの右辺})=\frac{abc}{s}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

となるので，(イ)は

$$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

となる。この両辺をRrで割れば③を得る。（副産物として $R_aR_bR_c=2R^2r$ も得られた。）（終）

④ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ について



BCの中点をD，重心をG，垂心をHとする。

OG：GH＝1：2 の証明でよく知られていることであるが，AH＝2OD である。
したがって②の証明中の記号を使えば，$\mathrm{AH}=2h_a$となる。同様に $\mathrm{BH}=2h_b$，$\mathrm{CH}=2h_c$ である。

△ABCの面積Sを

$S=\triangle\mathrm{ACH}+\triangle\mathrm{BCH}+\triangle\mathrm{ABH}$

と分解すると

$$\triangle\mathrm{ACH}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{CAH}$$

などより，

$$S=\frac{1}{2}c\cdot 2h_a\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\frac{1}{2}a\cdot 2h_b\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$$
$$+\frac{1}{2}b\cdot 2h_c\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$$
$$=ch_a\cos B+ah_b\cos C+bh_c\cos A$$

$h_a=R\cos A$，$h_b=R\cos B$，$h_c=R\cos C$ を代入すると

$$S=R(c\cos A\cos B+a\cos B\cos C+b\cos C\cos A)$$

となる。

これと三角形の面積公式 $S=\dfrac{abc}{4R}$ と連立すると

$$R(c\cos A\cos B+a\cos B\cos C+b\cos C\cos A)$$
$$=\frac{abc}{4R}$$

を得る。

両辺を $\dfrac{abc}{4R}$ で割り，$a=2R\sin A$ 等を代入して

$$\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}+\frac{\cos C\cos A}{\sin C\sin A}=1$$

すなわち

$$\frac{1}{\tan A\tan B}+\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan C\tan A}=1$$

両辺に $\tan A\tan B\tan C$ を掛けて，

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

を得る。(**終**)

他に，B，C から CA，AB に下ろした垂線の足を E，F として，△CEH∽△CFA より

$$\mathrm{EH}=\mathrm{CE}\cdot\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}=\frac{a\cos C}{\tan A}$$ であるから

$$\triangle\mathrm{ACH}=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{EH}=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\cos C}{\tan A}$$
$$=\frac{S}{\sin C}\cdot\frac{\cos C}{\tan A}=\frac{S}{\tan C\tan A}$$

などを利用する方法もあるが省略する。

§3. おわりに

加法定理を用いれば簡単に証明できる式を敢えて面倒な方法で証明した感もありますが，式がもつ美しさと図形的性質が関係することを見つけることができた喜びがありました。まだ他の図形的な捉え方があると思います。ご教示いただければ幸いです。

《参考文献》

〔1〕 鈴木崇裕　$\sin A+\sin B+\sin C$ から見えるもの　数研通信 No.80

〔2〕 米江慶典 「三角形の面積」についての一考察　数研通信 No.64

(静岡県立浜松湖北高等学校)