複素数係数の 2 次方程式の解の公式について
～根号内が虚数になるときの簡便公式～

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

複素数係数の 2 次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解の公式は実数係数の 2 次方程式の解の公式と同様に $z=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ であるが，根号内が虚数になる場合は「複素数の平方根」を求める必要があり，ド・モアブルの定理から次のように表される。

$$z=\frac{-\beta\pm\sqrt{|\varDelta|}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\alpha}$$

ただし，$\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma$，$\alpha$ は $\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{Re}\,\varDelta}{|\varDelta|}$，

$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{Im}\,\varDelta}{|\varDelta|}$ $(0\leqq\alpha<2\pi)$ を満たす最小正

しかし，三角関数を使わないで，もっと簡便に求められる表現があるはずである。

本稿では，このことを考察し，それを使って具体的なすべての係数が虚数である複素数係数の 2 次方程式を解いてみる。

§2. 虚数の平方根

α を虚数として $\sqrt{\alpha}$ を考える。この場合，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0$，θ は最小正$)$ とすると $\sqrt{\alpha}=\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$ である。

これは $z^2=\alpha$ の解であるから，解を $z=z_0=a+bi$ $(a$，b は実数$)$，α を $\alpha=c+di$ $(c$，d は実数$)$ とおくと，$(a+bi)^2=c+di$ である。

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ であるから，$a^2-b^2+2abi=c+di$ である。a, b, c, d は実数であるから，複素数の相等により，

$a^2-b^2=c$ ……① かつ $2ab=d$ ……② である。

また，$\alpha=c+di$ は虚数であることから $d\neq0$ である。よって，②から $a\neq0$ で　$b=\dfrac{d}{2a}$ ……②′

②′を①に代入して，$a^2-\left(\dfrac{d}{2a}\right)^2=c$

よって，$4a^4-4ca^2-d^2=0$

$A=a^2$ とおくと，$a\neq0$ より $A>0$ である。

また，$4A^2-4cA-d^2=0$ である。

これを解いて

$$A=\frac{2c\pm\sqrt{4c^2+4d^2}}{4}=\frac{c\pm\sqrt{c^2+d^2}}{2}$$

$A>0$ より $A=\dfrac{c+\sqrt{c^2+d^2}}{2}$ であるから

$$a=\pm\sqrt{\frac{c+\sqrt{c^2+d^2}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}{\sqrt{2}}$$

これを②′に代入して，

$$b=\pm\frac{d}{2\dfrac{\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}{\sqrt{2}}}=\pm\frac{d}{\sqrt{2}\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}$$

（複号同順）

したがって

$$\begin{aligned}z_0&=a+bi\\&=\pm\frac{\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}{\sqrt{2}}\pm\frac{d}{\sqrt{2}\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}i\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{d}{\sqrt{c+\sqrt{c^2+d^2}}}i\right)\end{aligned}$$

（複号同順）

なお，$c=\mathrm{Re}\,\alpha$，$d=\mathrm{Im}\,\alpha$，$\sqrt{c^2+d^2}=|\alpha|$ であるから　$z_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}+\dfrac{\mathrm{Im}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}}i\right)$

つまり，$z^2=\alpha$ の解は

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}+\frac{\mathrm{Im}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}}i\right)$$

である。

$z^2=\alpha$ の解

$z^2=\alpha$ $(\alpha$ は虚数$)$ の解は

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}+\frac{\mathrm{Im}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{Re}\,\alpha+|\alpha|}}i\right)$$

§3. 複素数係数の２次方程式の解の公式

複素数係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解の公式は，$\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma$ とおくと $z=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\varDelta}}{2\alpha}$ である。今，$\varDelta$ が虚数のときを考えているから，$\varDelta\neq 0$，$\mathrm{Im}\varDelta\neq 0$ である。

また，§2. での結果から

$$\pm\sqrt{\varDelta}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}+\frac{\mathrm{Im}\varDelta}{\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}}i\right)$$

である。よって，

$$z=\frac{-\beta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}+\frac{\mathrm{Im}\varDelta}{\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}}i\right)}{2\alpha}$$

である。

複素数係数の２次方程式の解の公式

複素数係数の２次方程式 $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ の解は $\varDelta=\beta^2-4\alpha\gamma$ が虚数のとき

$$z=\frac{-\beta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}+\frac{\mathrm{Im}\varDelta}{\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}}i\right)}{2\alpha}$$

§4. 公式を使って係数がすべて虚数である２次方程式を解く

§3. で得た公式を使って，次のような係数がすべて虚数である２次方程式(＊)を解いてみる。

$$(1+i)z^2-(2-i)z-1+2i=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

$\alpha=1+i$，$\beta=-(2-i)$，$\gamma=-1+2i$ であるから，

$$\begin{aligned}\varDelta&=\beta^2-4\alpha\gamma\\&=(2-i)^2-4(1+i)(-1+2i)\\&=4-4i+i^2-4(-1+i+2i^2)\\&=3-4i-4(-3+i)\\&=15-8i\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{Re}\varDelta=15$，$\mathrm{Im}\varDelta=-8$，

$$|\varDelta|=\sqrt{15^2+(-8)^2}=\sqrt{289}=17$$

§3. で得た解の公式より

$$\begin{aligned}z&=\frac{-\{-(2-i)\}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{15+17}+\frac{-8}{\sqrt{15+17}}i\right)}{2(1+i)}\\&=\frac{(2-i)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2}+\frac{-8}{4\sqrt{2}}i\right)}{2(1+i)}\\&=\frac{(2-i)\pm(4-i)}{2(1+i)}=\frac{3-i}{1+i},\ -\frac{1}{1+i}=\boldsymbol{1-2i,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}\end{aligned}$$

確認

- $z=1-2i$ のとき

$$\begin{aligned}&(1+i)z^2-(2-i)z-1+2i\\&=(1+i)(1-2i)^2-(2-i)(1-2i)-1+2i\\&=(1+i)(-3-4i)-(-5i)-1+2i\\&=1-7i+5i-1+2i=0\end{aligned}$$

- $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=\dfrac{-1+i}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}&(1+i)z^2-(2-i)z-1+2i\\&=(1+i)\left(\frac{-1+i}{2}\right)^2-(2-i)\left(\frac{-1+i}{2}\right)-1+2i\\&=(1+i)\left(-\frac{i}{2}\right)-\frac{-1+3i}{2}-1+2i\\&=\frac{-i+1+1-3i}{2}-1+2i=0\end{aligned}$$

確かに，$z=1-2i$，$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ は(＊)の解である。

§5. まとめ

複素数係数の２次方程式の解の公式では根号内が虚数になることがあるので，それを予め複素数 $a+bi$（a，b は実数）の形に直して新たな公式としたものである。ただし，複素数 z の実部，虚部を表す $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$ は便利な記号であるが，高校生には不慣れである。しかし，$\mathrm{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$\mathrm{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ であることから

$$z=\frac{-\beta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}+\frac{\mathrm{Im}\varDelta}{\sqrt{\mathrm{Re}\varDelta+|\varDelta|}}i\right)}{2\alpha}$$

は次のように表せる。

$$\begin{aligned}z&=\frac{-\beta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\varDelta+\bar{\varDelta}}{2}+|\varDelta|}+\frac{\frac{\varDelta-\bar{\varDelta}}{2i}}{\sqrt{\frac{\varDelta+\bar{\varDelta}}{2}+|\varDelta|}}i\right)}{2\alpha}\\&=\frac{-\beta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\varDelta+\bar{\varDelta}}{2}+|\varDelta|}+\frac{\frac{\varDelta-\bar{\varDelta}}{2}}{\sqrt{\frac{\varDelta+\bar{\varDelta}}{2}+|\varDelta|}}\right)}{2\alpha}\end{aligned}$$

ただし，これは複雑になりすぎるし，実際に計算する時には§3. で得た公式の方が便利であろう。

ここで考察した内容については進んだ生徒に考察させたい問題である。

（山口県立岩国高等学校）