ピタゴラス数と５の倍数

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1.「0，1，4，5，6，9 だけ」の足し算

0，1，4，5，6，9 の 6 つの数を考えます。この中の 2 数を加えた（2 桁になるときは一の位の）数が再びこの中のどれかになる足し算を考えます。例えば，$1+4=5$　や　$4+6=0$ がそうです。組み合わせを調べると，次の表の通り，0 か 5 を使わないわけにはいかないことに気づきます。

和	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	×	5	6	×	0
4	4	5	×	9	0	×
5	5	6	9	0	1	4
6	6	×	0	1	×	5
9	9	0	×	4	5	×

数学Ａで学ぶ「整数の性質」で，5 の倍数に関してはその判定法が「一の位が 0 または 5 であること」以外の記述はありません。小学校のときから馴染んでいる上，以後活用する機会も少ない 5 の倍数に光を当てて生徒たちを合同式まで案内するささやかな試みを紹介したいと思います。

§2. 東京大学の問題

新入生に対して入学前の春休みに次のような自由課題を課したことがあります。

問題 1

> (1)　円周率 π とは何か？
> (2)　$\pi>3.05$ であることを，平成 26 年にちなんで直径 26 の円を利用して示せ。

問題とともに，格子をかき入れた直径 26 の円を印刷して出題したところ，多くの力作が得られました。半径 13 の意図を見破ったレポートもありました。「円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ」は 2003 年の東京大学の前期入試問題です。

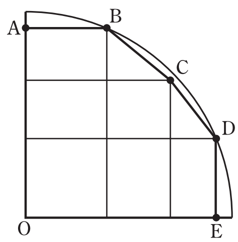
アルキメデスが円に内接，外接する正 96 角形を作って $3\dfrac{10}{71}<\pi<3\dfrac{1}{7}$ という円周率の評価を得たことは有名ですが，東京大学の問題も円周は内接する多角形の周長より長いという平凡な事実を用いて示すものです。内接する多角形は正多角形から始めて，正 6 角形では $\pi>3$ しか得られませんから次は正 12 角形で，というのが自然な流れでしょうか。調べてみると，正 8 角形でも $\pi>3.05$ という評価が得られることがわかります。

いずれにせよ $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ や $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ の値の評価が必要になります。

§3. 直径 26 の目論見

東京大学の問題を「試験会場でどのように解くのが賢明か」という立場ではなく，あとからのんびり味わおうという趣向ですが，「半径 13 の円を利用して」という条件の目論見は次のような解法を期待したからです。

座標平面において，原点Ｏを中心とする半径 13 の四分円で考えます。



この四分円において，5 点

$A(0,\ 12)$，$B(5,\ 12)$，$C(9,\ 9)$，$D(12,\ 5)$

そして $E(12,\ 0)$ をとると，

$3^2+4^2=5^2$　と　$5^2+12^2=13^2$

の 2 つが効いて

$AB=BC=CD=DE=5$

となります。ですから

（四分円弧の長さ）>（折れ線 ABCDE の長さ）

より　$\dfrac{13\pi}{2}>4\times 5$

よって直ちに

$$\pi>\frac{40}{13}>3.05$$

という評価を得るのです。点Cが円の内部にあるというのが，無理数さえ用いない簡単な計算で済ませる鍵となります。円周全体で考えれば円に内接しない 12 角形を用いたことになります。

そして，本稿でクローズアップしたいのが，評価に用いた線分の長さがすべて 5 であることです。

$a^2+b^2=c^2$ を満たすピタゴラス数 a，b，c には 5 の倍数が必ず含まれており，そのことを活かしたアイディアだったのです。

§4.　一の位で実験・観察

問題 2

> ピタゴラス数には 5 の倍数が必ず含まれるかどうか調べよ。

このような“True or False？”形式で生徒に投げかけた結果得られた，最も素朴な解答の要点が冒頭の計算なのです。すべての自然数は，その平方の一の位を調べると次の表のようになります。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
一の位	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

平方数の一の位は 0 を除けば 5 を中心に左右対称で，これは平方剰余の大切な性質です。結局，自然数の平方どうしの計算は一の位に着目すると

　0，1，4，5，6，9

だけで考えればよいことになります。したがって $a^2+b^2=c^2$ という計算が成立するとすれば，平方数 a^2，b^2，c^2 のいずれかの一の位には必ず 0 か 5 が含まれるというのが冒頭§1. の結論ですから，ピタゴラス数には 5 の倍数が必ず含まれることが証明できました。

実験や観察によって法則を予測・発見し，証明し，それを活用するという流れは，演繹に偏りがちな普段の授業では味わえない大切な過程です。整数論に偉大な業績を残したオイラーやガウスも膨大な数値計算から法則を抽出したと言われています。

一の位で考えるということは 10 を法とした合同式に他なりませんから，授業の展開においても合同式へのスムーズな橋渡しが期待できると思います。

§5.　5 を法とした合同式

5 を法とした合同式で考えると次のように更にシンプルになります。5 を法としたときの整数の平方は

（i）　$(\pm 1)^2\equiv 1 \pmod 5$

（ii）　$(\pm 2)^2\equiv 4\equiv -1 \pmod 5$

（iii）　$0^2\equiv 0 \pmod 5$

ですから，平方剰余は 1，4 のいずれかになります。つまり，a^2，b^2，c^2 は 5 で割ると余りは 0，1，4 のいずれかであって，2，3 にはならないということです。すると，a^2，b^2，c^2 のいずれも 5 の倍数でないとすると

$$a^2\equiv\pm 1,\ b^2\equiv\pm 1,\ c^2\equiv\pm 1 \pmod 5$$

ということですから，$a^2+b^2=c^2$ になる組み合わせがないことは一目瞭然です。

さて，平方剰余が ±1 ならば 4 乗剰余は 1 のみです。これを活かす手がないか考えてみました。すると，ピタゴラス数（互いに素とします）が

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$$

で表せることから abc が 5 の倍数であることを示せばよく，4 乗剰余が利用できそうです。実際に，もし m，n がともに 5 で割り切れなければ，

$$m^4\equiv n^4\equiv 1 \pmod 5$$

ですから，

$$\begin{aligned}abc&=(m^2-n^2)(2mn)(m^2+n^2)\\&=2mn(m^4-n^4)\\&\equiv 2mn(1-1)=0\end{aligned}$$

で，証明が終わります。

ところで

$(m,\ 5)=1,\ (n,\ 5)=1$ のとき，$m^4\equiv n^4\equiv 1 \pmod 5$ は，考えてみればフェルマーの小定理に他なりません。

> **フェルマーの小定理**
>
> p を素数とする。
>
> $(a,\ p)=1$ ならば $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$

再び東京大学の問題ですが，次も実質的には同じことを問うています。

問題 3

n を自然数とする。 n^5-n は 30 の倍数であることを示せ。(東大)

§6. 結びに変えて

5 以外の自然数を法とした同様の話題も尽きません。例えば 9 を法とした立方剰余は，

$n\equiv 0$ のとき $n^3\equiv 0^3\equiv 0$

$n\equiv \pm 1$ のとき $n^3\equiv(\pm 1)^3\equiv \pm 1$

$n\equiv \pm 2$ のとき $n^3\equiv(\pm 2)^3\equiv \mp 1$

$n\equiv \pm 3$ のとき $n^3\equiv(\pm 3)^3\equiv 0$

$n\equiv \pm 4$ のとき $n^3\equiv(\pm 4)^3=\pm 64\equiv \pm 1$

です。

そこで，冒頭と同じ趣向で 2014 年にちなんで，

問題 4

$l^3+m^3+n^3=14$ を満たす整数の組 $l,\ m,\ n$ はあるか？

という問題を参考文献〔1〕をもとに考えて出題してみました。3 年生でしたが，9 で割った余りで考えれば否定的な解決ができることを自ら発見したレポートを届けてくれました。

遠山啓が「合同式は凡人を天才に引き上げるものだといってよい」(参考文献〔2〕) と述べるとおり，「よい記号はよい思考を生み出す」という格言を高校生が実感できる筆頭教材だと思います。合同式の学習のきっかけのひとつとして，5 の倍数を使ったささやかな試みを紹介させていただきました。

《参考文献》

〔1〕 チャレンジ整数の問題 199
水上　勉著　日本評論社

〔2〕 初等整数論
遠山　啓著　日本評論社

(東京都立立川高等学校)