60° の角をもつ整数三角形の研究

國井（くにい）　圭己（としみ）

§1. はじめに

「60° の角をもつ，3 辺がすべて整数である相似でない三角形は無数にあるか，そしてそれらを一般的に求める方法はあるか」について，数研通信 49 号 (2004 年 4 月) に君島巖先生の「$z^2=x^2+y^2\pm xy$ の自然数解」という論文が掲載されています。私はこの論文に出会う前に，君島先生とほぼ同じ動機，つまり数研出版「新高校の数学 I」教科書 p.111 余弦定理の例題 4 「△ABC において，$a=7$，$b=5$，$c=8$ のとき，$\cos A$ の値と A を求めなさい。

解答．$\cos A=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\dfrac{1}{2}$ より，$A=60°$」

(解答は要約) を見て，素朴に「cos 30° や cos 45° の値は無理数なので，3 辺がすべて整数である三角形 (ここではこれを「整数三角形」と呼ぼう) でこれらの角を作ることはできないが，cos 60° の値は有理数であり，60° は上記例題のような整数三角形で作ることができる…。他にもあるのかな？」と思ったことから，表題の件について研究してみました。そして君島先生の方法とは全く違ったアプローチでの結果が得られたので報告します。

∠A＝60° である △ABC の 3 辺 a，b，c について，余弦定理より $a^2=b^2+c^2-bc$ …① が成り立つ。

§2. ①を満たす (a，b，c) の，m，n の 2 次同次式による表現

右辺を b について平方完成して

$$a^2=\left\{b^2-bc+\left(\frac{c}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{c}{2}\right)^2+c^2$$

$$a^2=\left(b-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2$$

ここで $x=b-\dfrac{c}{2}$ とおくと $a^2=x^2+\dfrac{3}{4}c^2$

$$4(a+x)(a-x)=3c^2$$

ここで $a=m^2+kn^2$，$x=m^2-kn^2$ とおくと，$a+x=2m^2$，$a-x=2kn^2$ となるので，

$$16km^2n^2=3c^2$$

$k=3$ とすれば，$c^2=16m^2n^2$ より $c=4mn$，

$a=m^2+3n^2$，$b=x+\dfrac{c}{2}=m^2+2mn-3n^2$

したがって

$(a,\ b,\ c)=(m^2+3n^2,\ m^2+2mn-3n^2,\ 4mn)$ …②

②を満たす (a，b，c) は常に①を満たすから，②の m，n に ($m>n$ を満たす) 自然数を代入することで①を満たす自然数 (a，b，c) の組すなわち ∠A＝60° である △ABC の 3 辺の整数値が得られる。

これにより ∠A＝60° である非相似な整数三角形 ABC は無数に得られるが，c は常に 4 の倍数であるので，互いに素な a，b，c にするために約分が必要な場合がある。

§3. ①を満たす自然数 (a，b，c) についての考察

(命題 1) (a，b，c) が互いに素であるとき，a は奇数である。

(証明) ①を満たす (a，b，c) が互いに素であるためには，b と c が互いに素な (ともに奇数) または (偶数と奇数) でなければならない。(b と c の公約数は，a の約数にもなる) すると，①の右辺は (奇数＋奇数－奇数) または (偶数＋奇数－偶数) となるので，a は奇数である。**(証明終)**

したがって，互いに素な (a，b，c) の偶・奇のパターンは，b，c の対称性を考えて，(奇，奇，奇) または (奇，偶，奇) の 2 つであるとわかる。…(＊)

(命題 2) (a，b，c) が (奇，偶，奇) であるとき，偶数は 8 の倍数である。

(証明) b を偶数，c を奇数として一般性を失わない。

①より，
$$a^2-c^2=b^2-bc$$
$$(a+c)(a-c)=b(b-c)$$

a，c は奇数だから，$a=2a'-1$，$c=2c'-1$ (a'，c' は整数) とおくと，

$$a+c=2(a'+c'-1),\ a-c=2(a'-c')$$

だから (左辺)$=4(a'+c'-1)(a'-c')$

ここで $(a'+c'-1)-(a'-c')=2c'-1$ (奇数) だから，$a'+c'-1$, $a'-c'$ の一方は奇数で他方は偶数である。よって(左辺) は 8 の倍数である。

一方，(右辺) においては $(b-c)$ は (偶数)−(奇数) で奇数だから，b は 8 の倍数である。(**証明終**)

※ (命題 1) と (命題 2) は，数A「整数の性質」分野の高校生向けの練習問題として使えそうである。

§4. §3. の(∗)を利用して互いに素な (a, b, c) を求める方法

a，c が奇数であるとして，①を b について解くと $b^2-bc+c^2-a^2=0$ より，解の公式から，

$$b=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4(c^2-a^2)}}{2}=\frac{c\pm\sqrt{4a^2-3c^2}}{2}$$

ここで，$4a^2-3c^2=y^2$ (y は整数) となるとき，y は奇数であり，b は整数となる。

$4a^2-y^2=3c^2$ から $(2a+y)(2a-y)=3c^2$

積が $3c^2$ となる 2 つの奇数を p，q $(p>q)$ とし，

$2a+y=p$，$2a-y=q$ とすると，

$a=\dfrac{p+q}{4}$，$y=\dfrac{p-q}{2}$ となる。

(a，y は必ず整数になる。$(2n-1)^2=4n(n-1)+1$ より $(\text{奇数})^2$ を 4 で割った余りは 1，したがって $3c^2$ を 4 で割った余りは 3 であるが，$3\times3\equiv1 \pmod 4$，$1\times1\equiv1 \pmod 4$ であるので，奇数を 2 つ掛け合わせて 4 で割った余りが 3 になるのは $3\times1\equiv3 \pmod 4$ の場合しかない。したがって，p，q それぞれを 4 で割った余りは一方が 3，他方が 1 であるので，$p+q$ は 4 の倍数，$p-q$ は 4 で割って 2 余る偶数になる。)

ここでもし，p と q に共通な素因数 c_1 があるとすると，c_1 は c の素因数であり，a および y の素因数にもなる (c_1 は奇素数なので 2 や 4 で約分されることはない) ので，$b=\dfrac{c\pm y}{2}$ も c_1 を素因数としてもつことになり，a，b，c すべてが c_1 を素因数としてもつから互いに素でなくなる。したがって p と q は互いに素であることが必要であり，p，q は一方が $3p'^2$，他方が q'^2 (p'，q' は $c=p'q'$ を満たす互いに素な奇数で，q' は素因数 3 をもたない) の形をしていなければならない。

b については，$b=\dfrac{c+y}{2}$ は常に正で適するが，$b=\dfrac{c-y}{2}$ は正になる場合のみ適する。

まとめると，次のようになる。

奇数 c に対し，$3c^2$ を互いに素な 2 つの奇数の積に分け，大きい方を p，小さい方を q として

$a=\dfrac{p+q}{4}$，$b=\dfrac{2c+p-q}{4}$ $\Bigl($正の場合のみ，$b=\dfrac{2c-p+q}{4}$ も$\Bigr)$ とすれば，目的の (a, b, c) が求まる。

§2. による方法と比べて，奇数 c に対して互いに素な (a, b, c) がもれなく求まり，最大公約数で割る必要がない。(b が奇数になるものについてのみ，b と c の値が入れ替わった同じ三角形が重複して現れる)

奇数 c の小さい値順に，$3c^2$ の素因数分解，p，q，a，b の値をいくつか表にして示す。

c	$3c^2$ の素因数分解	p	q	a	b	(a, b, c)
1	3	3	1	1	1	(1, 1, 1)
3	3^3	27	1	7	8	(7, 8, 3)
5	$3\cdot5^2$	75	1	19	21	(19, 21, 5)
		25	3	7	8	(7, 8, 5)
7	$3\cdot7^2$	147	1	37	40	(37, 40, 7)
		49	3	13	15	(13, 15, 7)
9	3^5	243	1	61	65	(61, 65, 9)
11	$3\cdot11^2$	363	1	91	96	(91, 96, 11)
		121	3	31	35	(31, 35, 11)
13	$3\cdot13^2$	507	1	127	133	(127, 133, 13)
		169	3	43	48	(43, 48, 13)
15	$3^3\cdot5^2$	675	1	169	176	(169, 176, 15)
		27	25	13	8, 7	(13, 8, 15), (13, 7, 15)
17	$3\cdot17^2$	867	1	217	225	(217, 225, 17)
		289	3	73	80	(73, 80, 17)
19	$3\cdot19^2$	1083	1	271	280	(271, 280, 19)
		361	3	91	99	(91, 99, 19)
21	$3^3\cdot7^2$	1323	1	331	341	(331, 341, 21)
		49	27	19	16	(19, 16, 21)

§5. 120° の場合

$\angle A = 120°$ の角をもつ $\triangle ABC$ でも，ほぼ同様の議論ができる。

こちらの場合は，余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ が成り立つので，§2.の型の一般形は，$c = 4mn$,

$a = m^2 + 3n^2$，$b = x - \dfrac{c}{2} = m^2 - 2mn - 3n^2$ となる。

§3.の(命題1)(命題2)も，そのまま成り立つ。

§4.の方法もそのまま使え，奇数 c に対する p，q を求め，$a = \dfrac{p+q}{4}$，$b = \dfrac{-2c+p-q}{4}$ を求めればよい。ただしこの場合は $-2c+p-q \leqq 0$ となるときは不適であり，また b のもう1つの解

$b = \dfrac{-2c-p+q}{4}$ は常に負となるので使えない。

この方法による，$\angle A = 120°$ の整数三角形もいくつか示しておく。(右表)

c	$3c^2$ の素因数分解	p	q	a	b	(a, b, c)
3	3^3	27	1	7	5	(7，5，3)
5	$3 \cdot 5^2$	75	1	19	16	(19，16，5)
		25	3	7	3	(7，3，5)
7	$3 \cdot 7^2$	147	1	37	33	(37，33，7)
		49	3	13	8	(13，8，7)
9	3^5	243	1	61	56	(61，56，9)
11	$3 \cdot 11^2$	363	1	91	85	(91，85，11)
		121	3	31	24	(31，24，11)
13	$3 \cdot 13^2$	507	1	127	120	(127，120，13)
		169	3	43	35	(43，35，13)

§6. おわりに

この結果は60°の角をはさむ辺の一方が任意の奇数値である非相似な整数三角形が必ず存在することを示しています。そしてそれらが高校の「整数の性質」レベルの議論で導かれたことが非常におもしろいと感じました。

《参考文献》

数研出版　新高校の数学I

(三重県立上野高等学校)