円錐曲線について

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

参考文献〔1〕p.46 の図のように，円錐をその頂点を通らない平面で切った切り口には 2 次曲線(放物線，楕円，双曲線)が現れる。また，切り口に楕円が現れる場合，楕円の中心は円錐の軸上には必ずしもない。これらについて職場の同僚と話をする機会を持った。そこで，実際に方程式を用いて 2 つの事実を確かめてみよう。

ただし，参考文献〔2〕p.71 応用例題 6 のように，曲面を座標軸に垂直な平面で切った切り口を方程式で扱うことは易しいが，そうでない平面で切る場合はわかりにくい。そこで主題 1 においては，切断する平面を $y=1$ (y 軸に垂直)と固定し円錐を動かす方法をとる。

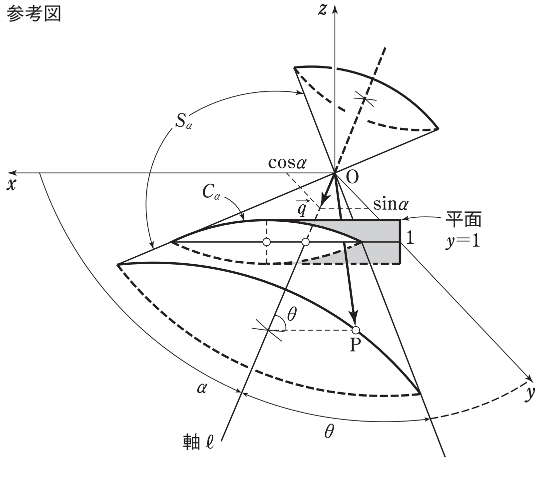
[主題 1]

θ は定数 ($0^\circ<\theta<90^\circ$) とする。

原点を O とする座標空間において，点 O を通る直線 ℓ と直線 OP のなす角が θ となる点 P の軌跡は，直線 ℓ を軸とする円錐の側面を表す。

(θ は円錐の軸と母線のなす角である。)

参考図



ここで，参考図のように直線 ℓ の方向ベクトルが

$\vec{q}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$，$0^\circ\leqq\alpha<180^\circ$

のときの円錐の側面を S_α とし，S_α を平面 $y=1$ で切った切り口を C_α とする。

α を動かすときに C_α の形状の変化を調べよう。

§2. 特別な場合

この節では，円錐の軸と母線のなす角が $\theta=45^\circ$ の場合について考察する。

[命題 2]

主題において $\theta=45^\circ$ の場合，側面 S_α の方程式は次の通り。

$$z^2=x^2\cos 2\alpha+2xy\sin 2\alpha-y^2\cos 2\alpha$$

証明　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{q}$ のなす角は 45° または 135° より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{q}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{q}|\times(\pm\cos 45^\circ)$$

両辺を 2 乗して 2 倍すると

$$2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{q})^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\vec{q}|^2$$

P(x，y，z) として成分で表すと

$$2(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=(x^2+y^2+z^2)\times 1$$

$$\therefore\quad x^2(2\cos^2\alpha-1)+4xy\cos\alpha\sin\alpha-(1-2\sin^2\alpha)y^2=z^2$$

2 倍角の公式を使うと結論を得る。

[命題 3]

円錐の側面 S_α を平面 $y=k$ ($k\neq 0$) で切った切り口は，平面 $y=1$ の場合と相似である。

したがって，y 軸に垂直な平面で切る場合は，平面 $y=1$ で切る場合を考えればよい。

証明　S_α の方程式は，x，y，z に関する同次 2 次方程式である。したがって，(x，1，z) が方程式の解であることと，(kx，k，kz) が方程式の解であることは同値であるから。

［命題 4］

主題 1 において $\theta=45^\circ$ の場合，円錐の側面 S_α を平面 $y=1$ で切った切り口(を zx 平面に正射影した図形) C_α を考える。

⑴ C_α の方程式は

$$z^2=x^2\cos 2\alpha+2x\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$$

⑵ $\alpha=45^\circ$，135° の場合，

C_α は放物線　$z^2=\pm 2x$

⑶ $45^\circ<\alpha<135^\circ$ の場合，

C_α は $(x,\ z)=(-\tan 2\alpha,\ 0)$ を中心とする楕円。

$0^\circ\leqq\alpha<45^\circ$，$135^\circ<\alpha<180^\circ$ の場合，

C_α は $(x,\ z)=(-\tan 2\alpha,\ 0)$ を中心とする双曲線。

⑷ 円錐の軸 ℓ と平面 $y=1$ の交点は

$(x,\ z)=\left(\dfrac{1}{\tan\alpha},\ 0\right)$ であり，楕円の中心とは異なる。

証明　⑴ $y=1$ を命題 2 の方程式に代入する。

⑵ 自明。

⑶ ⑴の両辺に $\cos 2\alpha(\neq 0)$ を掛けて，右辺を x について平方完成すると

$$\begin{aligned}z^2\cos 2\alpha&=x^2\cos^2 2\alpha+2x\sin 2\alpha\cos 2\alpha\\&\qquad-\cos^2 2\alpha\\&=(x+\tan 2\alpha)^2\cos^2 2\alpha-1\end{aligned}$$

$\therefore\ (x+\tan 2\alpha)^2\cos^2 2\alpha-z^2\cos 2\alpha=1$

したがって，$\cos 2\alpha<0$ ($45^\circ<\alpha<135^\circ$) のときは $(x,\ z)=(-\tan 2\alpha,\ 0)$ を中心とする楕円を表す。

また，

$$\cos 2\alpha>0\ (0\leqq\alpha<45^\circ,\ 135^\circ<\alpha<180^\circ)$$

のときは $(x,\ z)=(-\tan 2\alpha,\ 0)$ を中心とする双曲線を表す。

⑷ 直線 ℓ の方程式(媒介変数表示)は

$$x=t\cos\alpha,\ y=t\sin\alpha,\ z=0$$

である。これと平面 $y=1$ の交点においては

$x=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\tan\alpha}$ が成り立つ。

なお，⑵⑶における 2 次曲線の名称は参考文献〔1〕からわかる。

§3. 一般の場合

この節では，円錐の軸と母線のなす角 θ が一般の場合 ($0^\circ<\theta<90^\circ$) について考察する。

なお，主題 1 において，簡単のために

$A=\cos^2\alpha-\cos^2\theta$

$B=\sin^2\alpha-\cos^2\theta$

$D=\cos\theta\sin\theta$

$E=\cos\alpha\sin\alpha$

とおく。ここで，$0^\circ\leqq\alpha<180^\circ$ により，

$$\begin{aligned}A=0&\iff\cos\alpha=\pm\cos\theta\\&\iff\alpha=\theta,\ 180^\circ-\theta\\A<0&\iff-\cos\theta<\cos\alpha<\cos\theta\\&\iff 180^\circ-\theta>\alpha>\theta\end{aligned}$$

に注意しておく。

［命題 5］

切り口 C_α の方程式は次の通り。

$$Ax^2+2Ex+B=z^2\cos^2\theta$$

証明　まず，側面 S_α の方程式を求める。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{q}$ のなす角は θ または $180^\circ-\theta$ より，$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{q}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{q}|\times(\pm\cos\theta)$$

両辺を 2 乗して

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{q})^2=|\mathrm{OP}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta$$

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ として成分で表すと

$$(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2=(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

この S_α の方程式は x，y，z に関する同次 2 次式だから，側面を平面 $y=k$ ($k\neq 0$) で切った切り口は，命題 3 と同様に，平面 $y=1$ で切った切り口と相似である。

切り口 C_α の方程式は，$y=1$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}&x^2(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)+2x\cos\alpha\sin\alpha\\&\qquad+(\sin^2\alpha-\cos^2\theta)=z^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

これをおき換えて結論を得る。

［命題 6］

切り口 C_α の形状については次の通り。

㋐ $\alpha=\theta$，$180^\circ-\theta$ のときは放物線。

このとき，切断面は母線に平行である。

㋑ $\theta<\alpha<180^\circ-\theta$ のときは楕円。

㋒ $0^\circ\leqq\alpha<\theta$，$180^\circ-\theta<\alpha<180^\circ$ のときは双曲線。

証明　命題 5 の方程式を考える。

$A=0$ のとき，$2Ex+B=z^2\cos^2\theta$

ここで，$\alpha=\theta$，$180^\circ-\theta$ より $E\neq0$

これは放物線を表す。

$A\neq0$ のとき，両辺を A で割ると

$$x^2+2x\frac{E}{A}+\frac{B}{A}=z^2\frac{\cos^2\theta}{A}$$

x について平方完成すると

$$\left(x+\frac{E}{A}\right)^2-\frac{E^2-AB}{A^2}=z^2\frac{\cos^2\theta}{A} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで

$$\begin{aligned}E^2-AB&=\cos^2\alpha\sin^2\alpha\\&\quad-(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)(\sin^2\alpha-\cos^2\theta)\\&=\cos^2\theta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\theta)\\&=\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)\\&=\cos^2\theta\sin^2\theta=D^2\end{aligned}$$

①の両辺に $\dfrac{A^2}{D^2}$ を掛けて整理すると

$$\frac{A^2}{D^2}\left(x+\frac{C}{A}\right)^2-\frac{A}{\sin^2\theta}z^2=1$$

したがって，$A<0$ のときは楕円，$A>0$ のときは双曲線を表す。

§4. おわりに

[注意 7]

一般の円錐を一般の平面で切る場合にも，切り口には 2 次曲線が現れる。

証明　円錐の頂点を原点 O，頂点から平面に下ろした垂線を y 軸，この垂線と円錐の軸を含む平面が xy 平面となるように座標を設定することができる。すると，切断面の方程式は $y=k$ と表され，主題において定義した円錐の軸の方向ベクトル $\vec{q}$ は，$0^\circ\leqq\alpha<180^\circ$ の範囲にとることができる。円錐と平面の切り口は，円錐と平面 $y=1$ との切り口に相似(命題 5)であったから，命題 6 により結論を得る。

円錐の平面による切り口が 2 次曲線になることについては，古くはギリシャ時代から知られていた(参考文献〔 3 〕)が，このたび同僚との話をヒントにして，座標を用いる証明をまとめることができた。このような興味深い数学について，日常的に会話のできる本校の同僚や生徒に感謝を申し上げたい。

《参考文献》

〔 1 〕　高等学校数学科用　数学Ⅲ(教科書)　数研出版　第 2 章 p.34-49

〔 2 〕　高等学校数学科用　数学B(教科書)　数研出版　第 2 章 p.71

〔 3 〕　復刻版　ギリシア数学史　T.L. ヒース著　平田寛＋菊池＋大沼　訳　共立出版　p.285-293

(広島県　広島市立基町高等学校)