周期的な数列の一般項を 1 つの式で表すこと

伊藤　裕（いとう　ゆたか）

§1. はじめに

k を自然数として，$\{a_n\}$ を 1，2，……，k，1，2，……，k，…… という，1 から k までの自然数が繰り返される周期 k の数列とする。

この数列の一般項を 1 つの式で表すことを考えると，[ ] を Gauss 記号として

$$a_n = n - \left[\frac{n-1}{k}\right]k$$

とすればよい。

これでよいといえばよいのだが，この問題に Gauss 記号を使うのは反則だと個人的には感じるので，これは避けたい。

§2. 具体例

まず，周期が短い場合に具体的に考えてみる。

(1) $\{a_n\}$：1，2，1，2，1，2，……

$\{(-1)^n+1\}$：0，2，0，2，0，2，…… より，

$$a_n = \frac{(-1)^n+1}{2} + 1 = \frac{(-1)^n+3}{2} \quad \cdots\cdots(*)$$

とすればよい。

(2) $\{a_n\}$：1，2，3，1，2，3，……

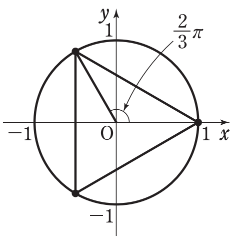
図のような，xy 平面上の単位円に内接する正三角形を利用して，

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{2}{3}\pi\right\}：-1，0，1，-1，0，1，\cdots\cdots$$

という周期 3 の数列を得るので，

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{2}{3}\pi + 2$$

とすればよい。



(3) $\{a_n\}$：1，2，3，4，1，2，3，4，……

まず，この数列を，1，2 が繰り返される周期 2 の数列と，0，0，2，2 が繰り返される周期 4 の数列の和として考える。

そして，図のような，xy 平面上の単位円に内接する正方形を利用して，

$$\left\{\sqrt{2}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}：-1，-1，1，1，\cdots\cdots$$

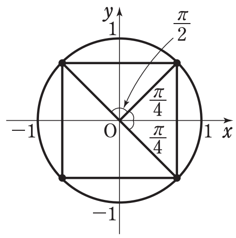
という，-1，-1，1，1 が繰り返される周期 4 の数列を得るので，0，0，2，2 が繰り返される周期 4 の数列の一般項は，

$$\sqrt{2}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1$$

となる。1，2 が繰り返される周期 2 の数列の一般項は $(*)$ で与えてあるので，

$$a_n = \sqrt{2}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{(-1)^n+5}{2}$$

とすればよい。



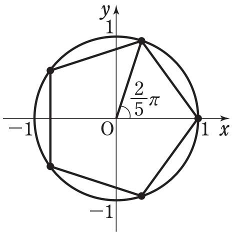
(4) $\{a_n\}$：1，2，3，4，5，1，2，3，4，5，……

$$\text{この数列を，}\left.\begin{array}{l} 1，0，0，0，0 \\ 0，2，0，0，0 \\ 0，0，3，0，0 \\ 0，0，0，4，0 \\ 0，0，0，0，5 \end{array}\right\}\text{が繰り返される 5 つの周期 5 の数列の和として考える。}$$

次に，図のような，xy 平面上の単位円に内接する正五角形を利用して，

$$\left\{\frac{\cos(n-2)\frac{2}{5}\pi}{\left|\cos(n-2)\frac{2}{5}\pi\right|}\right\}: 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ \cdots\cdots$$

という，1，1，1，−1，−1 が繰り返される周期 5 の数列を得る。



また，この数列の番号を付け換えることにより，

$$\left\{\frac{\cos(n+1)\frac{2}{5}\pi}{\left|\cos(n+1)\frac{2}{5}\pi\right|}\right\}: -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots\cdots$$

という，−1，−1，1，1，1 が繰り返される周期 5 の数列も得られる。

すると，この 2 つの数列を足して 2 で割ることにより，

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n-2)\frac{2}{5}\pi}{\left|\cos(n-2)\frac{2}{5}\pi\right|}+\frac{\cos(n+1)\frac{2}{5}\pi}{\left|\cos(n+1)\frac{2}{5}\pi\right|}\right)\right\}$$

という，0，0，1，0，0 を繰り返す周期 5 の数列が得られる。

よって，この数列を $\{b_n\}$ とおき，$\{b_n\}$ の番号を付け換えて，

$$a_n=b_{n+2}+2b_{n+1}+3b_n+4b_{n+4}+5b_{n+3} \quad \cdots\cdots(＊＊)$$

とすれば，求める一般項を得る。

§3. 一般化

§2 の(3)，(4)をもとにして，周期 k の数列の一般項を求めることを考える。

(1) 周期 k が奇数のとき

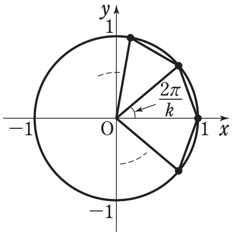
$k=2l+1$ として，図のような，xy 平面上の単位円に内接する正 k 角形を考える。k が奇数であることに注意すると，この正 k 角形の頂点が y 軸上に存在することはない。

すると，この正 k 角形の頂点は

(i) y 軸の右側に l 個，y 軸の左側に $(l+1)$ 個

(ii) y 軸の右側に $(l+1)$ 個，y 軸の左側に l 個

存在するかのいずれかである。



次に xy 平面と複素数平面を同一視すると，各頂点に対応する複素数の偏角の cos は 0 になることはないので，各偏角の cos の値をその絶対値で割ることができる。すると，最初に 1 が $(l+1)$ 個，次に −1 が l 個続く周期 k の数列 $\{c_n\}$ が得られるので，数列 $\{c_n\}$ の番号を付け換えることにより，最初に −1 が l 個，次に 1 が $(l+1)$個続く周期 k の数列 $\{d_n\}$ も得られる。そして，この 2 つの数列 $\{c_n\}$ と $\{d_n\}$ の一般項を足して 2 で割ることにより，

0，……，0，1，0，……，0

(両側の 0 は l 個ずつ)

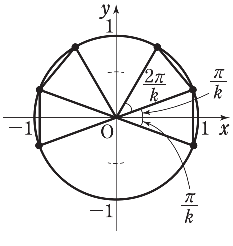
が繰り返される周期 k の数列の一般項が得られる。後は，§2 (4)と同様に考えれば，1 から k までの自然数が繰り返される周期 k の数列の一般項を得る。

さらに，任意の k 個の数が繰り返される周期 k の数列に対しても，§2 の (＊＊) と同様の式における，1 から 5 にあたる数字を，その任意の k 個の数に換えると，求める一般項を得ることができる。

(2) 周期 k が偶数のとき

$k=2l$ として，図のような，xy 平面上の単位円に内接する正 k 角形を考える。

すると，この正 k 角形の頂点は x 軸上に存在することはないので，正 k 角形の頂点は，x 軸の上側に l 個，x 軸の下側に l 個存在することになる。



次に⑴と同様に，xy 平面と複素数平面を同一視すると，各頂点に対応する複素数の偏角の sin は 0 になることはないので，各偏角の sin の値をその絶対値で割ることができる。すると，最初に -1 が l 個，次に 1 が l 個続く周期 k の数列が得られるので，この数列の各項に 1 を足して $\dfrac{l}{2}$ 倍することにより，最初に 0 が l 個，次に l が l 個続く周期 k の数列 $\{e_n\}$ が得られる。そして，1 から l までの自然数を繰り返す周期 l の数列を $\{f_n\}$ とすると，$\{e_n\}$ と $\{f_n\}$ の一般項を足すことにより，1 から k までの自然数が繰り返される，周期 k の数列の一般項を得る（数列 $\{f_n\}$ の一般項の存在は，正確には数学的帰納法による）。

(補足)

$$
\begin{array}{rl}
 & \{e_n\}:0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ l,\ l,\ \cdots,\ l \\
+ & \{f_n\}:1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l \\
\hline
 & \quad 1,\ 2,\ \cdots,\ l,\ l+1,\ l+2,\ \cdots,\ 2l
\end{array}
$$

さらに，任意の k 個の数が繰り返される周期 k の数列 $\{a_n\}$ に対しては，まず前半の l 個を繰り返す周期 l の数列 $\{g_n\}$ と，後半の l 個を繰り返す周期 l の数列 $\{h_n\}$ という，2 つの周期 l の数列を考える。次に，数列 $\{e_n\}$ を $\dfrac{1}{l}$ 倍して番号を付け換えることにより，最初に 1 が l 個，次に 0 が l 個続く周期 k の数列 $\{i_n\}$ を得て，単に $\{e_n\}$ を $\dfrac{1}{l}$ 倍することにより，最初に 0 が l 個，次に 1 が l 個続く周期 k の数列 $\{j_n\}$ も得る。そして最後に，$\{g_n\}$ の一般項と $\{i_n\}$ の一般項を掛けたものと，$\{h_n\}$ の一般項と $\{j_n\}$ の一般項を掛けたものとを加えれば，求める一般項を得る（数列 $\{g_n\}$ と $\{h_n\}$ の一般項の存在は，正確には数学的帰納法による）。

(補足)

$$
\begin{array}{rl}
 & \{g_n\}:a_1,\ \cdots,\ a_l,\ a_1,\ \cdots,\ a_l \\
\times & \{i_n\}:1,\ \cdots,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0 \\
\hline
 & \quad a_1,\ \cdots,\ a_l,\ 0,\ \cdots,\ 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \{h_n\}:a_{l+1},\ \cdots,\ a_{2l},\ a_{l+1},\ \cdots,\ a_{2l} \\
\times & \{j_n\}:0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 1 \\
\hline
 & \quad 0,\ \cdots,\ 0,\ a_{l+1},\ \cdots,\ a_{2l}
\end{array}
$$

§4. おわりに

この原稿を書いて読み返しているときに，§3 の議論は，多様体論における 1 の分割に似ている所があると感じた。また，周期 3 や 4 の場合は，生徒にとっても面白い練習問題になると思うので，さっそく授業で試してみたい。

（神奈川県立市ケ尾高等学校）