特集

平行多面体とその元素ペンタドロン

秋山（あきやま）　仁（じん）

一般によく知られている多面体の族は5種類の正多面体です。しかし，自然界により頻繁に現れる多面体の族は**平行多面体**です。この族は平行六面体 C_1，六角柱 C_2，切頂八面体 C_3，菱形十二面体 C_4 および長菱形十二面体 C_5 の5種類のクラス C_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ からなります（図1）。

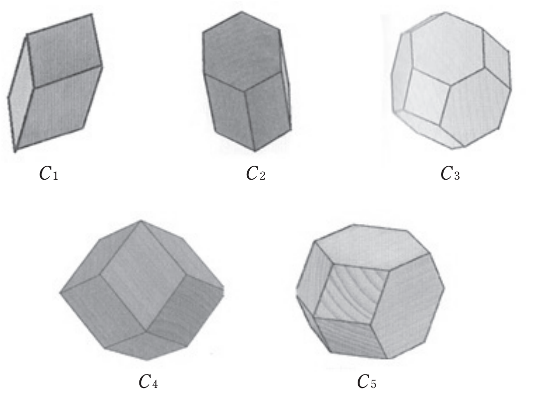


図1　C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

任意の平行多面体 P は，P を平行移動するだけで，空間を埋め尽くします（図2）。このような性質を持つ凸多面体は平行多面体だけであることが，1885年にロシアの結晶学者 *E. Fedorov* によって示されています。

各クラス C_i はアフィン変換により閉じていて，充填性が保存されます（図3）。

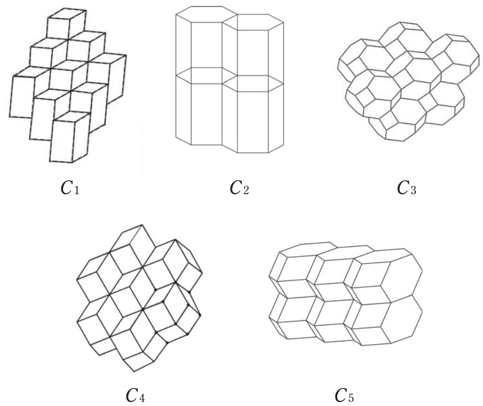


図2　空間充填

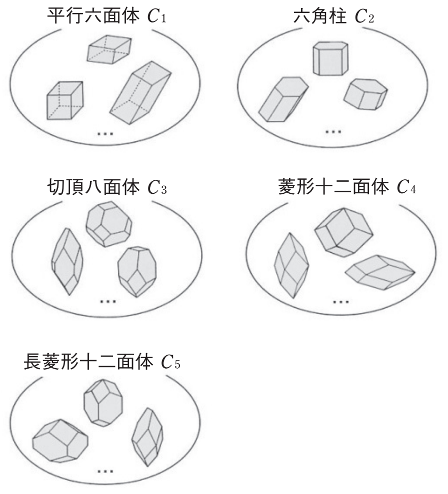


図3　平行多面体の5つのクラス

これらの形はいろいろな鉱物の結晶や，元素の配置（*BCC*，*FCC*，*HCP* など）のボロノイ図としても現れるので，極めて重要であると見なされています。

そこで，本稿では，まず5種類から成る平行多面体の分解性と変身性について紹介しましょう。

平行多面体の分解性について

玩具のレゴはいくつかの基本ブロックを組み合わせて，いろいろな形を作る遊びです。ある1対の基本ブロックを組み合わせて，平行多面体の5種類の各クラスに属する多面体が作れます。

> **平行多面体の元素定理**
> 平行多面体のどのクラス $C_i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ に対しても，C_i に属するある多面体が存在し，それを**ペンタドロン**という5面体（のコピー）の面と面を貼り合わせて作ることができる。

この意味で，ペンタドロンは平行多面体の**元素**（**アトム**）ということができます。ペンタドロンは，図4(a)のような切頂八面体 P（正方形の面6個，正六面体の面8個から成る14面体，アルキメデスの準正多面体のひとつです）を48等分して作れます。もう少し詳しくいうと，P を図4(b)のように24等分して得られる6面体をさらに2等分して得られる5面体（図5）です。

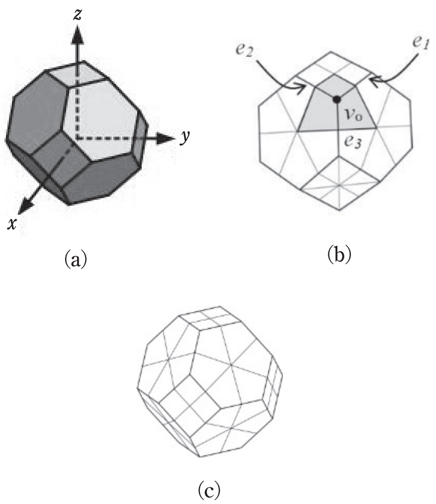


図4　ペンタドロンの作り方　Ⅰ

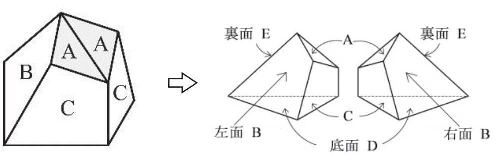


図5　ペンタドロンの作り方　Ⅱ

ペンタドロンは鏡映関係にある雄雌の対から成りますが，総称してペンタドロンと呼びます。ペンタドロンの展開図は図6のようになります。

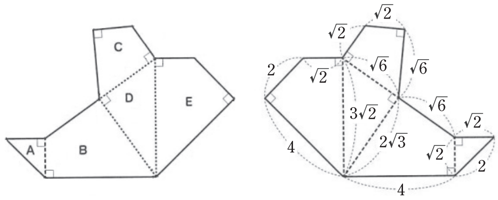


図6　ペンタドロンの展開図

では，実際，各 C_i に属する平行多面体をペンタドロンで作ってみましょう（図7）。

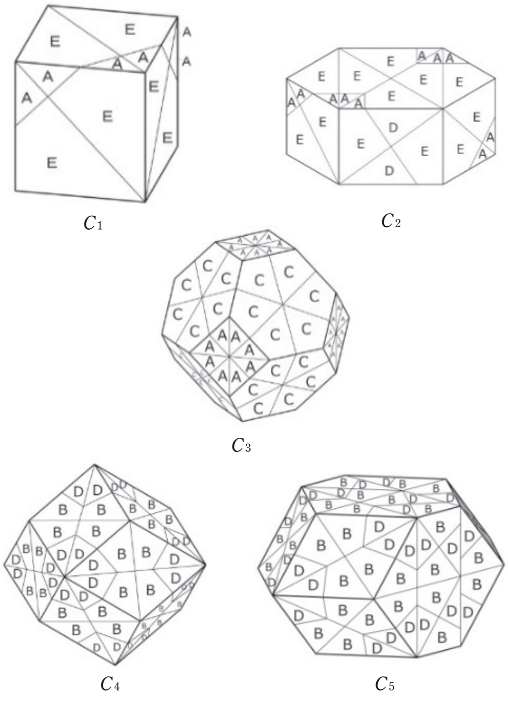


図7　ペンタドロンを貼り合わせて作った平行多面体

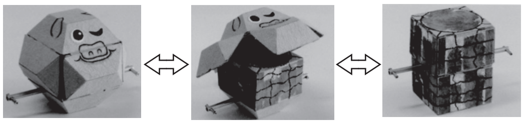
平行多面体の表裏逆転変身可能性について

ある多面体 P を有限個の断片に切り分け，断片どうしの辺を適切に選び，それらをテープで樹木上につなぎます。この状態の下に，断片を並べかえて，他の多面体 Q を作ることができるとき，P と Q は互いに**変身可能**であるといいます。特に，P と Q の変身において，Q の表面が P の切断面だけから成り，P

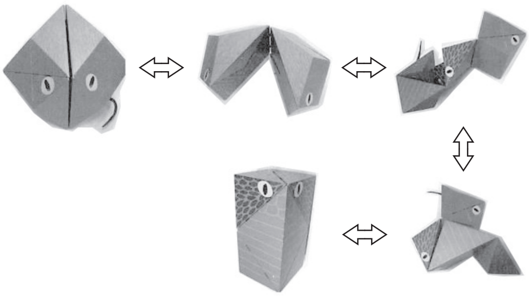
の表面がすべてQの内側に隠れるとき，PとQは**表裏逆転変身可能**といいます。平行多面体の5つのクラスC_i($i=1, 2, 3, 4, 5$)の間に，変身性に関する次の関係が成り立ちます。

平行多面体の表裏逆転変身可能定理
任意のi，j($1 \leqq i, j \leqq 5$)に対し，また，任意の$P \in C_i$に対し，ある$Q \in C_j$が存在し，PとQは表裏逆転変身可能である。

上の定理を示す，いくつかの例を紹介しましょう。



$C_1 \longleftrightarrow C_3$



$C_1 \longleftrightarrow C_4$

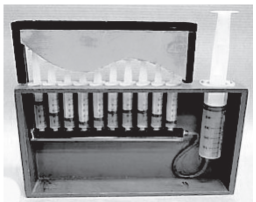
$C_3 \longleftrightarrow C_4$

多面体の講義をする際，模型や教具を用いると，学生たちの反応が良く，飲み込みが早いようです。現在，教育現場では，しきりにアクティブ・ラーニングの重要性が叫ばれています。そこで，最後に，平成26年度にJSTの主催で，高校の数学の先生方を対象として行われた，サイエンス・リーダース・キャンプ(SLC)について少しだけ紹介しましょう。

サイエンス・リーダース・キャンプ

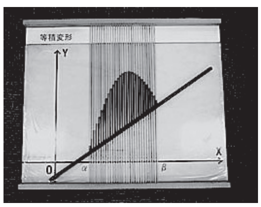
各学校に理科室や音楽室と同様に，数学の教材，教具，模型，装置などを設置した，“数学室を作ろう”というスローガンの下，数学授業の改革を目的とした研修が東京理科大で行われました。この研修は平成26年8月21日～24日に3泊4日の合宿スタイルで全国各地から25名の先生が参加し，“体験を通じた最先端の理数系総合指導力の向上”についての研修でした。研修プログラムの中には，中・高校で履修する各単元において，役に立つ教具や装置を制作する時間も多く設けられました。本当は沢山の教具を制作し，各勤務校に持ち帰っていただき，“数学室”に設置し，授業で大いに活用していただきたいのですが，研修日程の制約で，今回は主に以下の教具を制作しました。それらを紹介しましょう。

① 区分求積法



区分求積法のアイデアを示す模型です。最初，小注射器をすべて上まで持ち上げておき，求積したい図形をその上から押し下げます。するとそれぞれの小注射器が図形の対応する部分だけ下がります。これらの小注射器全部がチューブで大きな注射器につなげてあります。小さな注射器から送られてきた空気が大きな注射器を持ち上げます。よって大きい注射器の目盛りを読み取れば図形全体のおおよその面積を求めることができます。

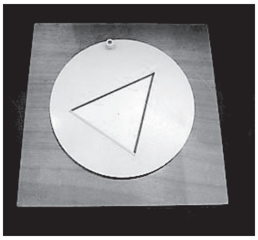
② 放物線と直線によって囲まれる面積



放物線 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) と直線

$y=mx+n$ で囲まれる部分の面積 S を求める公式を理解するための教具です。この公式を導く過程を目で見て納得する等積変形器です。

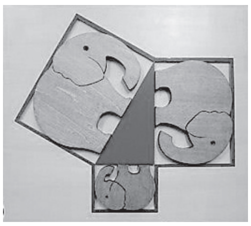
③　内接円・外接円・回転盤



この装置を利用すると三角形や四角形などの内接円・外接円の性質や有無を調べることができます。金属回転盤にマグネット三角形を乗せて回転させると，残像が同心円を描きます。最初は２つか３つの同心円が見えるかもしれません。回転盤上の三角形の位置を少しずつ移動させると，円が１つになる位置があります。このとき，見えている円がこの三角形の内接円で，回転の中心が三角形の内心となります。四角形の場合も，同様にして内接円の有無や性質を調べられます。

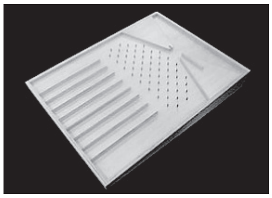
　頂点のそれぞれに豆電球をつけた四角形を回転盤上に乗せて回転させると，今度は外接円に関する実験ができます。四角形を移動して豆電球が描く円が１つになれば，この四角形に外接円が存在することがわかります。

④　三象・三平方の定理



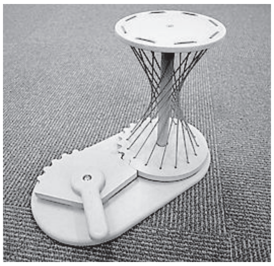
この作品は，中央に３辺の長さがａ，ｂ，ｃ（ｃは斜辺）の直角三角形があります。象のように複雑な図形でも三平方の定理が成り立つことを，天秤を使った実験で確かめる教具です。厚さが同じで，相似な３つの象（母象，子象，父象）それぞれの横幅の長さがａ，ｂ，ｃに対応しています。ｃに対応した父象の面積は，ａとｂに対応した母象と子象を合わせた面積と等しくなるので，天秤の一方のリングに父象をつるし，もう一方のリングに母象と子象をつるすと，天秤はつりあいます。

⑤　二項分布パチンコ



板に等間隔に釘が打ってあります。上の中心部分から小球を転がすと，小球は釘にぶつかるたびに左右のいずれか一方に等確率で落下します。一度に多くの小球を落下させると，台の下部にたまる小球は二項分布になることが実験で確かめられます。途中にいろいろな“つっかえ棒”を配置し，ポアソン分布や二山分布なども作れます。

⑥　回転双曲面



円柱の側面に線分を並べ，それをひねると，鼓（つづみ）のような形をした回転双曲面に近い形になることを視覚的に確認できます。

　どうぞ，先生方ももの作りに挑戦してみてください。

《参考文献》

〔１〕 J. Akiyama, M. J. Ruiz, A Day's Adventure in Math Wonderland, (World Scientific), 2008
〔２〕 J. Akiyama, K. Matsunaga, Treks into Intuitive Geometry, (Springer), 2015
〔３〕 理科大数学体験館図録

（東京理科大学教授）