ピタゴラス数からピタゴラス数を作る
～理数科課題研究で生徒の作った公式～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

平成 24 年度の新教育課程から普通科では「課題学習」が，理数科では「課題研究」が課せられるようになり，早 4 年目になる。

平成 26 年度に私が担当した班（4 名）は，三角関数の加法定理や二項定理，ド・モアブルの定理等を用いて，ピタゴラス数が 1 組与えられたとき，それから無数の自明ではないピタゴラス数をつくりだす公式を導き出した。

本稿では，その公式について紹介する。

§2. ピタゴラス数 3，4，5 から作られるピタゴラス数

よく知られているように m，n $(m>n)$ を自然数として，m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 はピタゴラス数を表す。この式の m，n に適当な値を代入すればピタゴラス数になるわけであるが，最も簡単で馴染みのあるのは $m=2$，$n=1$ のときの 3，4，5 である。

では，このピタゴラス数 3，4，5 から 6，8，10 であるような自明なピタゴラス数以外のピタゴラス数を作り出すような公式はあるのか，さらには一般的に a，b，c がピタゴラス数のとき，a，b，c から自明でないピタゴラス数を作り出すような公式はあるのか？　生徒が興味を持ったのはこのことである。

⑴　三角関数の加法定理を利用する

ピタゴラス数 つまり 不定方程式 $a^2+b^2=c^2$ $(a<b<c)$ の自然数解については，簡単でよく知られたものとしては

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 12,\ 13)$ がある。

したがって，n を自然数とするとき，

$(a,\ b,\ c)=(3n,\ 4n,\ 5n)$，$(5n,\ 12n,\ 13n)$ も（自明な）ピタゴラス数である。そこで，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ のとき，この 3 数から自明でない自然数解を求めることを考える。

たとえば，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ である $\triangle ABC$ は $(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ のとき，$\angle A=\theta$ とすると，$\angle C=90^\circ$ の直角三角形であるから，

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ である。

このとき，2 倍角の公式から

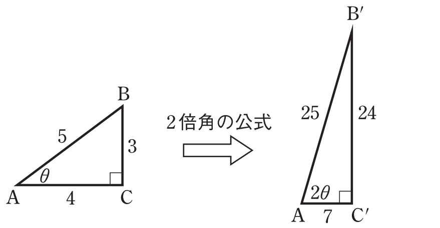
$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$$

である。すると，三角関数の相互関係

$\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta=1$ より，$\left(\dfrac{7}{25}\right)^2+\left(\dfrac{24}{25}\right)^2=1$ である。

よって，$7^2+24^2=25^2$ であり，これよりピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)=(7,\ 24,\ 25)$ が得られる。



ピタゴラス数(3, 4, 5)　　ピタゴラス数(7, 24, 25)

ピタゴラス数 $(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ において，$m=2$，$n=1$ のとき $(3,\ 4,\ 5)$ であり，$m=4$，$n=3$ のとき $(7,\ 24,\ 25)$ である。

さて，三角関数の加法定理から，

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)\\&=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\&=\frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}\cdot\frac{3}{5}=\frac{117}{125}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(2\theta+\theta)\\&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=\frac{7}{25}\cdot\frac{4}{5}-\frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{44}{125}\end{aligned}$$

三角関数の相互関係 $\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta=1$ より

$\left(-\dfrac{44}{125}\right)^2+\left(\dfrac{117}{125}\right)^2=1$　よって，$44^2+117^2=125^2$

したがって，$(a,\ b,\ c)=(44,\ 117,\ 125)$ である。

三角関数の加法定理から，n を自然数として

$$(*)\quad \begin{aligned}\sin(n+1)\theta&=\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta\\ \cos(n+1)\theta&=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta\end{aligned}$$

であるから，同様にするとピタゴラス数 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ が次々に作られる。つまり，ピタゴラス数 $(3,\ 4,\ 5)$ から三角関数の加法定理を使うことで，ピタゴラス数 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ が作られる。これを $(a_n,\ b_n,\ c_n)_{3,4,5}$ と表すことにする。

(2)　数列の漸化式にもち込む

では，$(a_n,\ b_n,\ c_n)_{3,4,5}$ を 3，4，5 と n の式で表してみよう。そのためには数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の連立隣接 2 項間の漸化式を作り，それから一般項 a_n，b_n を求めればよい。

$\alpha_n=\dfrac{a_n}{c_n}=\sin n\theta$，$\beta_n=\dfrac{b_n}{c_n}=\cos n\theta$ とおくと

$a_1=3$，$b_1=4$，$c_1=5$ より

$\alpha_1=\dfrac{a_1}{c_1}=\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，$\beta_1=\dfrac{b_1}{c_1}=\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ である。

すると，$(*)$ より

$$\alpha_{n+1}=\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n \quad \cdots\cdots①$$

$$\beta_{n+1}=-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n \quad \cdots\cdots②$$

という実数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ についての連立漸化式が得られるので，あとは，この連立漸化式を満たす数列 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ の一般項を求めればよい。

$\alpha_{n+1}-k\beta_{n+1}$（$k$ はある定数）を考えて，①，②より

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}-k\beta_{n+1}&=\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n-k\left(-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n\right)\\&=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}k\right)\alpha_n+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}k\right)\beta_n\\&=\frac{3k+4}{5}\alpha_n-\frac{4k-3}{5}\beta_n\\&=\frac{3k+4}{5}\left(\alpha_n-\frac{4k-3}{3k+4}\beta_n\right)\end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{4k-3}{3k+4}=k$ を満たすように定数 k の値を定めると，$4k-3=3k^2+4k$ より $k^2=-1$

よって，$k=\pm i$ である。

$k=i$ のとき $\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}i=\dfrac{4+3i}{5}(\alpha_n-\beta_n i)$

であるから，数列 $\{\alpha_n-\beta_n i\}$ は初項が

$\alpha_1-\beta_1 i=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i=\dfrac{3-4i}{5}$ で，公比が $\dfrac{4+3i}{5}$ の等比数列である。よって，

$$\alpha_n-\beta_n i=\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots③$$

である。

$k=-i$ のとき，同様にすれば，

$$\alpha_n+\beta_n i=\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots④$$

$(③+④)\div 2$ より，

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots\cdots⑤$$

また，④－⑤ より，

$$\begin{aligned}\beta_n i&=\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\\&\quad-\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}-\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\beta_n&=(-i)\frac{1}{2}\left\{\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}-\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{4-3i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{4+3i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

また，

$$\alpha_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-4i}{5}\left(\frac{4+3i}{5}\right)^{n-1}+\frac{3+4i}{5}\left(\frac{4-3i}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

において，$\dfrac{3-4i}{5}=\dfrac{4+3i}{5}(-i)$，$\dfrac{3+4i}{5}=\dfrac{4-3i}{5}i$

であることから，$\alpha_n=\dfrac{i}{2}\left\{\left(\dfrac{4-3i}{5}\right)^n-\left(\dfrac{4+3i}{5}\right)^n\right\}$

である。したがって，

$$\alpha_n=\frac{i}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n-\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right\}$$

$$\beta_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right\}$$

である。また，$①^2+②^2$ より，

$$\begin{aligned}{\alpha_{n+1}}^2+{\beta_{n+1}}^2&=\left(\frac{4}{5}\alpha_n+\frac{3}{5}\beta_n\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\alpha_n+\frac{4}{5}\beta_n\right)^2\\&={\alpha_n}^2+{\beta_n}^2\end{aligned}$$

であるから，

${\alpha_n}^2+{\beta_n}^2={\alpha_{n-1}}^2+{\beta_{n-1}}^2={\alpha_{n-2}}^2+{\beta_{n-2}}^2=\cdots$

$$\cdots=\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$

よって，α_n，β_n には $\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2=1$（$n$ は自然数）という関係が成り立っている。

したがって，

$$\left[\frac{i}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n-\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right\}\right]^2 +\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4-3i}{5}\right)^n+\left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right\}\right]^2=1$$

つまり，

$$\left[\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right]^2 +\left[\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\right]^2=(5^n)^2$$

である。

ここで，

$$A_n=\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}$$

$$B_n=\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}$$

とおく。

A_n，B_n が整数であることを示そう。

二項定理より

$(4+3i)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r4^{n-r}(3i)^r=N+Mi$（$N$，$M$ は整数）

と表せるので，$(4-3i)^n=\overline{(4+3i)^n}=N-Mi$

よって，
$$\begin{aligned}A_n&=\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\\&=\frac{i}{2}\{(N-Mi)-(N+Mi)\}\\&=-\frac{i}{2}\cdot 2Mi=M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{1}{2}\{(4-3i)^n+(4+3i)^n\}\\&=\frac{1}{2}\{(N-Mi)+(N+Mi)\}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2N=N\end{aligned}$$

よって，A_n，B_n は（0 以外の）整数である。すると，$|A_n|$，$|B_n|$ は自然数であり，$|A_n|^2+|B_n|^2=5^n$ を満たす。ここで，改めて $a_n=|A_n|$，$b_n=|B_n|$ とおくと，a_n，b_n は自然数で，$a_n{}^2+b_n{}^2=(5^n)^2$ を満たす。

なお，記号$|\ \ |$はその中にある数が（確認したように）整数であるから，実数の絶対値であるが，虚数単位 i が見受けられるので複素数の絶対値としても問題はない。

$$\left|\frac{i}{2}\{(4-3i)^n-(4+3i)^n\}\right|=\left|\frac{i}{2}\right||(4-3i)^n-(4+3i)^n|$$
$$=\frac{1}{2}|(4-3i)^n-(4+3i)^n|$$

であり，$(a_n, b_n, c_n)_{3,4,5}$ は

$$\left(\frac{|(4+3i)^n-(4-3i)^n|}{2},\ \frac{|(4+3i)^n+(4-3i)^n|}{2},\ 5^n\right)$$

と表せる。

§3. ピタゴラス数 *a*，*b*，*c* から作られるピタゴラス数

これを一般化すれば，a，b，c がピタゴラス数のとき

$$\frac{|(b+ai)^n-(b-ai)^n|}{2},\ \frac{|(b+ai)^n+(b-ai)^n|}{2},\ c^n$$

（n は自然数）はピタゴラス数であり，

$$\frac{|(b+ai)^n\pm(b-ai)^n|}{2}=\frac{|(a+bi)^n\pm(a-bi)^n|}{2}$$

であるから，$(a_n, b_n, c_n)_{a,b,c}$ は，

$$\left(\frac{|(a+bi)^n-(a-bi)^n|}{2},\frac{|(a+bi)^n+(a-bi)^n|}{2},c^n\right)$$

である。

さらに，$z=a+bi$（a，b は実数）のとき，z の実部 a を $\mathrm{Re}z$ で，z の虚部 b を $\mathrm{Im}z$ で表すとすれば，

$$\frac{|(a+bi)^n+(a-bi)^n|}{2}=|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$$
$$\frac{|(a+bi)^n-(a-bi)^n|}{2}=|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$$
であるから

$$(a_n,b_n,c_n)_{a,b,c}=(|\mathrm{Re}(a+bi)^n|,|\mathrm{Im}(a+bi)^n|,c^n)$$

である。

よって，次の定理が得られたことになる。

> **定理１　１組のピタゴラス数から無数の自明ではないピタゴラス数を作り出す方法**
>
> a，b，c がピタゴラス数のとき，
> $|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n（n は自然数）はピタゴラス数を表す。

§4. ピタゴラス数 *a*，*b*，*c* から作られるピタゴラス数を *a*，*b*，*c* の整式で表す〜ド・モアブルの定理の活用〜

ド・モアブルの定理

（＊）　$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

より

$$\cos n\theta=\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$\sin n\theta=\mathrm{Im}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

である。さらに，ド・モアブルの定理(＊)の右辺は二項定理を使えば，

$$(＊＊)\quad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\cos^{n-r}\theta\sin^r\theta\, i^r$$

となる。

また，$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$（ただし θ は $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす角）と表せる。これらのことから，

$|\mathrm{Re}(a+bi)^n|$，$|\mathrm{Im}(a+bi)^n|$，c^n（n は自然数）が a，b，c の n 次の整式として表される。これは三角関数の n 倍角の公式を導くことと同じことである。

(＊＊)の右辺にある i^r について r を $r=4k-3$，$r=4k-2$，$r=4k-1$，$r=4k$（k は自然数）と場合分けすることで，

$$i^r=\begin{cases} i & (r=4k-3) \\ -1 & (r=4k-2) \\ -i & (r=4k-1) \\ 1 & (r=4k) \end{cases}$$

となるから，実部は $r=4k-2$，$4k$ のとき，虚部は $r=4k-3$，$4k-1$ のときであり，それぞれの場合の総和がそれぞれ $\cos n\theta$，$\sin n\theta$ である。

$$\begin{cases} 4k-3\text{ のとき} & 1 \\ 4k-1\text{ のとき} & -1 \end{cases},\quad \begin{cases} 4k-2\text{ のとき} & -1 \\ 4k\text{ のとき} & 1 \end{cases}$$

l を自然数として，それぞれが $2l-1$ のとき $(-1)^{l-1}$，$2l$ のとき $(-1)^l$ と表され

$$i^r=\begin{cases} (-1)^{l-1}i & (r=2l-1\text{ のとき}) \\ (-1)^l & (r=2l\text{ のとき}) \end{cases}$$

であることから，$n=2m$（m は自然数）のとき

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta+i\sin\theta)^n \\
&=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\cos^{n-r}\theta\sin^r\theta\, i^r \\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}\cos^{2m-2l}\theta\sin^{2l}\theta \\
&\quad +i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}\cos^{2m-2l+1}\theta\sin^{2l-1}\theta \\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(\sin^2\theta)^l \\
&\quad +i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(\cos^2\theta)^{m-l}\cos\theta(\sin^2\theta)^{l-1}\sin\theta \\
&=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(1-\cos^2\theta)^l \\
&\quad +i\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(1-\sin^2\theta)^{m-l}(\sin^2\theta)^{l-1} \\
&\qquad \times\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

ここで，実部と虚部の比較をして，

$$\cos n\theta=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l{}_n\mathrm{C}_{2l}(\cos^2\theta)^{m-l}(1-\cos^2\theta)^l$$

$$\sin n\theta=\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}{}_n\mathrm{C}_{2l-1}(1-\sin^2\theta)^{m-l}(\sin^2\theta)^{l-1}\times\sin\theta\cos\theta$$

である。

$n=2m-1$ のときも同様にして

● n が偶数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$

$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

● n が奇数のとき

$$\cos n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta$$

$$\sin n\theta=\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r+1}\theta$$

となる。

これが，三角関数の n 倍角の公式である。

よって，次のようになる。

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$$

であるから，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

とおくと，$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$

よって，

$$\begin{aligned}
&(a+bi)^n \\
&=\{\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n \\
&=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}(\cos n\theta+i\sin n\theta)
\end{aligned}$$

（ド・モアブルの定理より）

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta+i(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

したがって，

$$\mathrm{Re}(a+bi)^n=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta$$

$$\mathrm{Im}(a+bi)^n=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

である。また，

$$\begin{aligned}
&\cos^{n-2r}\theta\sin^{2r}\theta \\
&=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{n-2r}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2r} \\
&=\frac{a^{n-2r}b^{2r}}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\cos^{n-2r-1}\theta\sin^{2r}\theta$$
$$=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{n-2r-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^{2r+1}$$
$$=\frac{a^{n-2r-1}b^{2r+1}}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

であるから，

● nが偶数のとき

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

● nが奇数のとき

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

である。ここで，偶奇によらず1つの式で表したいので，$\dfrac{1-(-1)^n}{2}=\begin{cases}0 & (n\text{は偶数})\\ 1 & (n\text{は奇数})\end{cases}$

$$\frac{-1-(-1)^n}{2}=\begin{cases}-1 & (n\text{は偶数})\\ 0 & (n\text{は奇数})\end{cases}$$

であることを使えば，次のように表せる。

$$\begin{cases}n\text{が偶数のとき} & \dfrac{n}{2}\\ n\text{が奇数のとき} & \dfrac{n-1}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{n-\frac{1-(-1)^n}{2}}{2}=\frac{2n-1+(-1)^n}{4}$$

$$\begin{cases}n\text{が偶数のとき} & \dfrac{n-2}{2}\\ n\text{が奇数のとき} & \dfrac{n-1}{2}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{n-1+\frac{-1-(-1)^n}{2}}{2}=\frac{2n-3-(-1)^n}{4}$$

これより，

$$\cos n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}$$

$$\sin n\theta=\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}$$

であるから，

$$|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}|\cos n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\times\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|$$
$$=\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|,$$

$$|(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}|\sin n\theta|$$
$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\times\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|$$
$$=\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|$$

したがって，a，b，cがピタゴラス数のとき，

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|,$$

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|,$$

c^n（nは自然数）

はピタゴラス数を表す。これが，平成26年度理数科課題研究1班(数学)で得られた結果である。

定理2　1組のピタゴラス数から無数の自明ではないピタゴラス数を作り出す方法

a，b，cがピタゴラス数のとき，

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-1+(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r}a^{n-2r}b^{2r}\right|,$$

$$\left|\sum_{r=0}^{\frac{2n-3-(-1)^n}{4}}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_{2r+1}a^{n-2r-1}b^{2r+1}\right|,$$

c^n（nは自然数）

はピタゴラス数を表す。

(山口県立岩国高等学校)