正三角形の折り目の定理

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

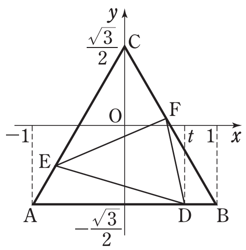
§1. 正三角形を折る

正三角形を，ある頂点をその向かい合う辺の上に移すという条件のもとで折るとき，その折り目の直線は，必ずある特定の曲線の接線になっているのではないかと予想し，それを確かめたいと思った。

§2. 正三角形の折り目の定理

１辺の長さが２の正三角形の１つの頂点を，向かい合う辺の上に移して正三角形を折るとき，その折り目を含む直線は常にある特定の放物線の接線であり，それは放物線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2$ と合同である。

§3. 定理の証明



正三角形 ABC の１辺を２として，座標平面上において $A\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ として，C を辺 AB 上の点Dに移し，$D\left(t,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする。辺 AC 上の点 E，辺 BC 上の点Fでもって，正三角形の折り目を線分 EF とする。

ここで，$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で，直線 EF の方程式を追求する。そのために，まずは２点 E，F の座標を t で表したい。

対称性から，$CF=FD=b$ とおき，△BDF において余弦定理より

$$b^2=(1-t)^2+(2-b)^2-2(1-t)(2-b)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=b^2+3+t^2-b(3+t)$$

これより，$b=\dfrac{3+t^2}{3+t}$ を得る。

これと，$\angle OCF=30°$ より

$$(\text{F の } x \text{ 座標})=b\sin 30°=\frac{3+t^2}{2(3+t)}$$

$$(\text{F の } y \text{ 座標})=\frac{\sqrt{3}}{2}-b\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}(3+t^2)}{2(3+t)}=\frac{\sqrt{3}\,t(1-t)}{2(3+t)}$$

よって

$$F\left(\frac{3+t^2}{2(3+t)},\ \frac{\sqrt{3}\,t(1-t)}{2(3+t)}\right)\quad\cdots\cdots①$$

次にEの座標を求めるために，まず AE の長さを t で表す。$\triangle AED\backsim\triangle BDF$ より

$$AE=AD\times\frac{BD}{BF}=(t+1)\times\frac{1-t}{2-b}$$
$$=(t+1)\times(1-t)\times\frac{3+t}{6+2t-(3+t^2)}$$
$$=(t+1)\times(1-t)\times\frac{3+t}{-(t+1)(t-3)}$$
$$=\frac{(1-t)(3+t)}{3-t}$$

$\angle EAD=60°$ より

$$(\text{E の } x \text{ 座標})=-1+AE\cos 60°=-1+\frac{(1-t)(3+t)}{2(3-t)}$$
$$=\frac{2(t-3)}{2(3-t)}+\frac{(1-t)(3+t)}{2(3-t)}$$
$$=-\frac{t^2+3}{2(3-t)}$$

$$(\text{Eの}y\text{座標})=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{AE}\sin 60^\circ$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}(1-t)(3+t)}{2(3-t)}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}\{(3-t)+(t-1)(t+3)\}}{2(3-t)}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}\,t(t+1)}{2(3-t)}$$

よって

$$\mathrm{E}\left(-\frac{t^2+3}{2(3-t)},\ -\frac{\sqrt{3}\,t(t+1)}{2(3-t)}\right)\quad\cdots\cdots②$$

①，②より，直線 EF の傾きは，

$$\left\{\frac{\sqrt{3}\,t(1-t)}{2(3+t)}+\frac{\sqrt{3}\,t(t+1)}{2(3-t)}\right\}\div\left\{\frac{3+t^2}{2(3+t)}+\frac{t^2+3}{2(3-t)}\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\,t(1-t)(3-t)+\sqrt{3}\,t(t+1)(3+t)}{(3+t^2)(3-t)+(3+t^2)(3+t)}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}\,t(t^2+3)}{6(3+t^2)}=\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

これと①(または②)より，直線 EF の方程式は

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}t\left\{x-\frac{3+t^2}{2(3+t)}\right\}+\frac{\sqrt{3}\,t(1-t)}{2(3+t)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}tx-\sqrt{3}\,\frac{t(3+t^2)-3t(1-t)}{6(3+t)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}tx-\sqrt{3}\,\frac{t^2(3+t)}{6(3+t)}=\frac{\sqrt{3}}{3}tx-\frac{\sqrt{3}}{6}t^2$$

$$\mathrm{EF}:y=\frac{\sqrt{3}}{3}tx-\frac{\sqrt{3}}{6}t^2\quad\cdots\cdots③$$

ここで，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ とする。

$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ より，

$f'(t)=\frac{\sqrt{3}}{3}t$，$-tf'(t)+f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{6}t^2$ であるから③の方程式は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ と同じである。

つまり，③は放物線 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ 上の点$(t,\ f(t))$における接線の方程式になっている。

したがって，正三角形 ABC の折り目を含む直線 EF は常に放物線 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2$ の接線である。

§4. 一般化

以上は正三角形の 1 辺を 2 としたが，1 辺の長さを $2a$ とすると，§3 においてすべての図形を x 軸方向にも y 軸方向にも a 倍に拡大することになるから，方程式における x を $\frac{x}{a}$ に，y を $\frac{y}{a}$ におき換えればよい。折り目を含む直線が接する放物線の方程式は，$\frac{y}{a}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{x}{a}\right)^2$ つまり，$y=\frac{\sqrt{3}}{6a}x^2$ である。

したがって，正三角形の折り目の定理を一般化すると次のようになる。

『1 辺の長さが $2a$ の正三角形の 1 つの頂点を，向かい合う辺の上に移して正三角形を折るとき，その折り目を含む直線は常にある特定の放物線の接線であり，それは放物線 $y=\frac{\sqrt{3}}{6a}x^2$ と合同である。』

(愛知県　名古屋国際中学校・高等学校)