年賀パズルの幾何一題

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. 年賀パズル

平成 27 年にちなんで，答えが 27° になる年賀パズルを作りました。

「四角形 ABCD の対角線を引いたところ，辺とのなす角度が次のようになった。

$\angle ABD = 40°$,

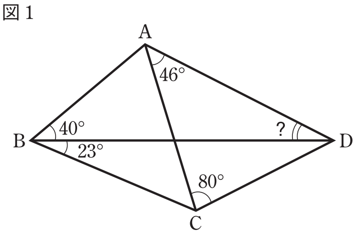
$\angle CBD = 23°$,

$\angle ACD = 80°$,

$\angle CAD = 46°$

このとき，∠ADB を求めよ。」というものです。(図 1)

図 1



三角形の内角の和が 180° であることから得られる角度を次々に埋めていこうと思っても，
∠ADC＝54° 以外の進展はありません。条件にある 40° と 80°，23° と 46° という 2 組の角度をどう活用するかが焦点になります。

CA＝CD といった条件がないので，80° を中心角，40° を円周角とみて円を利用することもできそうにありません。

ところが，あれこれ試行錯誤をしていると，思いがけない解法の存在や問題設定の背景が見えてきます。図らずも初等幾何のささやかな教材になるのではないかと思い，ここに紹介させていただくことにしました。生徒たちが示した解法を中心に話を進めたいと思います。

§2. いろいろな解法

筆者も想定していた解法は次の通りです。

解法 1 (図 2)

△ABC の外接円と直線 BD の交点を I とすると，円周角の定理から

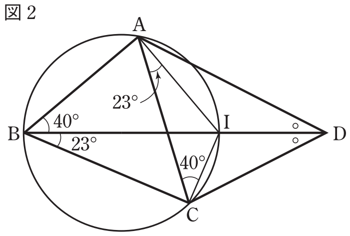
$\angle ACI = \angle ABI = 40°$, $\angle CAI = \angle CBI = 23°$

であるから，線分 CI および AI はそれぞれ ∠ACD, ∠CAD の二等分線。よって点 I は △ACD の内心。したがって，線分 DI は ∠ADC の二等分線で

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}(180° - 46° - 80°) = 27°$$

……(答)

図 2



生徒たちは数学Aで三角形の角の二等分線が 1 点で交わることを学びますが，それが決して当たり前ではないことが心に響くには，別の機会が必要です。このパズルの解法のような問題解決に役立つ場面はその 1 つです。

また，同じ点 I を ∠ACD の二等分線と対角線 BD との交点としてとると，

$\angle ACI = 40° = \angle ABI$

であることから，円周角の定理の逆により 4 点 A, B, C, I が共円であることが分かります。したがって，今度は円周角の定理から

$\angle IAC = \angle IBC = 23°$

が分かります。つまり AI が ∠CAD の二等分線になり，以下同様の議論となります。

1 つの定理と，その定理の逆を意識しながら活用するよい練習になると思います。

解法 2（図 3）

△ACD の外接円と対角線 BD の交点を O とすると，円周角の定理から

$\angle AOD = \angle ACD = 80°$

$\angle COD = \angle CAD = 46°$

であるから，△OAB および △OBC はいずれも二等辺三角形と分かる。

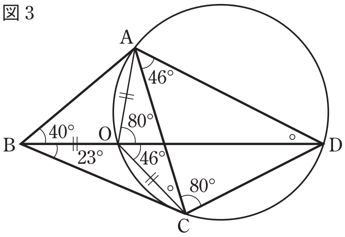
したがって OA＝OC となり，

$\angle ACO = \frac{1}{2}(180° - 80° - 46°) = 27°$

よって，円周角の定理から

$\angle ADB = \angle ADO = \angle ACO = 27°$ ……(答)

図 3



不思議なことは，△ABC と △ACD は，一方の外接円と対角線 BD との交点が他方の内心，外心の位置を示していることです。

解法 3（図 4）

辺 AD 上に PD＝CD となる点 P をとって二等辺三角形 DCP を作ると，

$\angle CPD = \frac{1}{2}(180° - \angle CDP) = 63° = \angle ABC$

であるから，4 点 A，B，C，P は共円。したがって円周角の定理から ∠ABP＝∠ACP＝17° なので

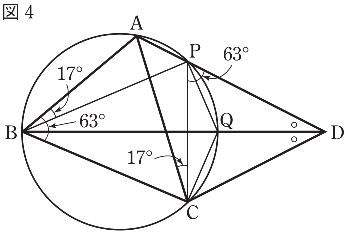
$\angle PBD = 40° - 17° = 23° = \angle CBD$

弧 PC と対角線 BD の交点を Q とすれば PQ＝CQ となるので △PQD≡△CQD

よって

$\angle ADB = \angle PDB = \frac{1}{2}\angle PDC = 27°$ ……(答)

図 4

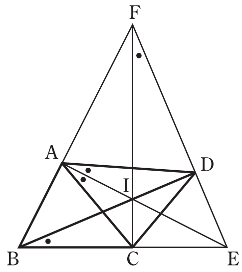


§3. この問題の背景

内心の活用を念頭に作問したパズルだったのですが，何か背景になる構図があるのではないかと思って解法 3 を眺めていると，頂点 D を通り対角線 BD に垂直な直線を引いてみようという気になったのです。するとこの問題のからくりが見えてきました。それを以下に紹介します。

一般に，ある鋭角三角形について「その垂心は垂足三角形の内心になっている」という性質があります。(鈍角三角形の場合は，垂心とひとつの頂点を入れ替えれば成り立ちます。)

図 5



証明は高校生にとってちょうどよい演習問題です。この性質を本問にあわせてアルファベットを振ったものが図 5 です。左下に問題の図形が斜めに隠れているのが分かります。

△FBE の垂心が I，各頂点からの垂線の足が点 A，C，D です。この構図の中には共円点が 6 組あって，

A，B，C，I　　C，E，D，I　　D，F，A，I

A，B，E，D　　C，E，F，A　　D，F，B，C

の各 4 点が共円点になっています。これらを利用すると例えば，●印の 4 か所が等しい角であることが分かります。他にも互いに等しい 4 角が 2 組あります。その結果，△FBE の垂心であった点 I は，垂線の足がつくる垂足三角形 ACD の内心になるわけです。さらには

$\angle ACB = \angle DCE$ や $\angle CAB = \angle DAF$

に注目すると，点 B は △ACD の傍心（の 1 つ）になっていることも分かります。先の性質の逆である「三角形の内心は，3 つの傍心を頂点とする三角形の垂心である」も成り立ちます。

垂心と内心の相性の良さが問題の背景にあったことに，自分自身驚いた次第です。

§4. むすびに

数多くある角度問題の大半を知らない身としては，二番煎じと知らずに拙稿をまとめているものとは思いますが，いわゆるラングレーの問題を代表とする整角四角形の 4 点角問題とは異なる条件の与え方であり，問題集とは一味違う楽しい自由課題にもなるのではないかと思います。

また日頃，まじめにこつこつ学習するだけでなく野生的な気持ちで問題に取り組む必要を感じることがあります。そのためには，難しそうな構えをした問題ではなく，「易しそうなのになかなかできない」という問題が欠かせないと思います。

生徒たちは，誤答もたくさん寄せてきました。与えられていない条件を用いたり，等長と思い込んだりしたものが多かったのですが，ここが初等幾何の良いところで，彼らはその失敗を通して論理の訓練がなされているものと信じます。

（元東京都立立川高等学校教諭）