左右積法
～２次式の因数分解の画期的な方法～

下中（しもなか）　利之（としゆき）

§1. はじめに

$6x^2-5x-6$，$12x^2-8x-15$ など２乗の係数が１ではない２次式の因数分解の方法は，

$$\begin{array}{cccc} 2 & & -3 \longrightarrow & -9 \\ & \times & & \\ 3 & & 2 \longrightarrow & 4 \\ \hline 6 & & -6 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & & -3 \longrightarrow & -18 \\ & \times & & \\ 6 & & 5 \longrightarrow & 10 \\ \hline 12 & & -15 & -8 \end{array}$$

「たすき掛け」とよばれる方法で行ってきた。
x^2 の係数や定数項が 12，24 など約数が多数ある場合は試行錯誤して因数分解を行った。
参考文献〔１〕の p.33 に「左右積法」という画期的な方法が載っており，最近まで知らなかった。周りの数学の先生に聞いてみても知らない方が多いので，紹介したいと思った。
x，y の２次式の因数分解は，下中が独自に考えたものである。

§2. $acx^2+(ad+bc)x+bd$ の因数分解

例①)　$6x^2-5x-6$ の因数分解

x^2 の係数 6 と定数項の -6 を掛けて -36，足して x の係数 -5 となる２つの数を見つけて -9 と 4 を縦に書いて

$$\begin{array}{c} -9 \\ 4 \end{array}$$

x^2 の係数 6 を左に書く。

$$\begin{array}{cccc} 6 & -9 & \text{両方 3 で割れる} & \\ & & & \longrightarrow \\ 6 & 4 & \text{両方 2 で割れる} & \end{array} \quad \begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{array}$$

左側の 2 と 3 に x をつけて　$(2x-3)(3x+2)$
試行錯誤することなく，１つに決まってしまう。原理としては x^2 の係数が 6 なので，$\dfrac{1}{6}$ で全体をかっこでくくると　$\dfrac{1}{6}(6^2x^2-6\cdot5x-6\cdot6)$
$6x=X$ とおくと，

$$\frac{1}{6}(X^2-5X-36)=\frac{1}{6}(X-9)(X+4)$$
$$=\frac{1}{3\times2}(6x-9)(6x+4)$$
$$=\left(\frac{6x-9}{3}\right)\left(\frac{6x+4}{2}\right)$$
$$=(2x-3)(3x+2)$$

一般式の場合は

$$acx^2+(ad+bc)x+bd$$
$$=\frac{1}{ac}\{a^2c^2x^2+ac(ad+bc)x+abcd\}$$
$$=\frac{1}{ac}\{X^2+(ad+bc)X+ad\cdot bc\}$$

（$acx=X$ とおく）

$$=\frac{1}{ac}(X+ad)(X+bc)$$
$$=\frac{1}{ac}(acx+ad)(acx+bc)$$
$$=\frac{acx+ad}{a}\times\frac{acx+bc}{c}$$
$$=(cx+d)(ax+b)$$

左右積法は２次の係数と定数項を掛けるので，値が大きくなり，因数を見つけるのが難しくなるという難点がある。それに対して「因数表」(〔１〕p.36) というものがある。

例②)　$2x^2-7x-72$ の因数分解

掛けて $2\times(-72)=-144$，足して -7
144 を素因数分解して $144=2^4\times3^2$
横に 1 2 2^2 2^3 2^4 縦に 1 3 3^2 と書いて

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 2^2\ 2^3\ 2^4 \\ 3 \\ 3^2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & \boxed{6} & \overset{\bullet}{12} & \boxed{24} & 48 \\ 9 & 18 & 36 & 72 & 144 \end{array}$$

この表の中心が黒丸・がついている 12 になる。黒丸に関して対称な値を掛けるといずれも 144 になる。足して -7 になるのは，因数表の△印の 9 と 16，16 は -16 として

$$\begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{-16} \\ 2 & 9 \end{array} \xrightarrow{2\text{で割る}} \begin{array}{cc} 1 & -8 \\ 2 & 9 \end{array}$$

$2x^2-7x-72=(x-8)(2x+9)$ となる。

素因数が 3 個以上の場合でも，「因数表」は使える。

例③)　$12x^2-8x-15$ の因数分解

$12\times(-15)=-180=-2^2\times3^2\times5$ なので，

横に 1，2，2^2，5，2×5，$2^2\times5$，縦に 1，3，3^2 として

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 3 & 6 & \boxed{12} \bullet & \boxed{15} & 30 & 60 \\ 9 & 18 & 36 & 45 & 90 & 180 \end{array}$$

黒丸に関して対称な値を掛けるといずれも 180 になり，足して -8 になるものは，○印の 10 と -18

$$\begin{array}{cc} \cancel{12} & \cancel{10} \\ \cancel{12} & \cancel{-18} \end{array} \xrightarrow[6\text{で割る}]{2\text{で割る}} \begin{array}{cc} 6 & 5 \\ 2 & -3 \end{array}$$

$12x^2-8x-15=(6x+5)(2x-3)$

授業では因数表は時間がかかるので紹介せず，素因数分解して 2 つの数を見つけださせた。

§3. x，y の 2 次の式の因数分解

例④)　$2x^2+5xy+3y^2-3x-5y-2$ の因数分解

左右積法を 2 回やることになり，2 通りのやり方がある。

（解 1）　x，y の 2 次の項に着目して

$(2x^2+5xy+3y^2)+(-3x-5y)-2$

左から 3 つの項を因数分解して

掛けて $2\cdot3=6$　足して 5 となるのは，2 と 3 で

$$\begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{2} \\ 2 & 3 \end{array} \xrightarrow{2\text{で割る}} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}$$

$(x+y)(2x+3y)+(-3x-5y)-2$

2 次の係数と定数項を掛けて $-2(x+y)(2x+3y)$，足して $-3x-5y$ となるのは

$-2(2x+3y)$ と $(x+y)$

x，y の 2 次の項 $(x+y)(2x+3y)$ を左に書き，同じものは約分していくと

$$\begin{array}{cc} (x+y)\cancel{(2x+3y)} & -2\cancel{(2x+3y)} \\ \cancel{(x+y)}(2x+3y) & \cancel{(x+y)} \end{array} \xrightarrow[x+y\text{で割る}]{2x+y\text{で割る}} \begin{array}{cc} (x+y) & -2 \\ (2x+3y) & 1 \end{array}$$

$\{(x+y)-2\}\{(2x+3y)+1\}=(x+y-2)(2x+3y+1)$

（解 2）　x に着目して

$2x^2+(5y-3)x+(3y^2-5y-2)$

定数項の 3 つの項を因数分解して

掛けて $3\times(-2)=-6$，足して -5 は -6 と 1 で

$$\begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{-6} \\ 3 & 1 \end{array} \xrightarrow{3\text{で割る}} \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$2x^2+(5y-3)x+(y-2)(3y+1)$

2 次の係数と定数項を掛けて $2(y-2)(3y+1)$，足して $5y-3$ となるのは $2(y-2)$ と $(3y+1)$ で，x^2 の係数 2 の左に書き，2 で約分していくと

$$\begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{2}(y-2) \\ 2 & (3y+1) \end{array} \xrightarrow{2\text{で割る}} \begin{array}{cc} 1 & (y-2) \\ 2 & (3y+1) \end{array}$$

$\{x+(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$

$=(x+y-2)(2x+3y+1)$

§4. 最後に

左右積法を用いれば，2 次の因数分解が格段に速く解けるようになる。3 年前から，生徒に左右積法を教えてきた。たすき掛けも紹介するが，生徒は x^2 の係数が 1 でないときも x^2 の係数が 1 のときと同じようにできるので，左右積法の方が簡単だと言っていた。中学から，たすき掛けを知っている生徒は，始めはこのやり方でやらなかったが，x^2 の係数が 6 や 12 など大きくなると困り，左右積法でやっていた。

また，$6x^2-5x-6=0$ のように x^2 の係数が 1 でない 2 次方程式を解くときに，因数分解でやるか解の公式を使うか迷うことになるが，左右積法でできない場合のときだけ解の公式を使うようにと指導できる。教科書・参考書でもこの左右積法を紹介してほしい。

《参考文献》

〔1〕「大学入試・センター突破　計算力トレーニング 上」

著者：山﨑亘　出版社：桐書房

（北海道　函館白百合学園中学高等学校）