2015 東大入試での二項係数の問題から

堂薗（どうぞの） 幸夫（ゆきお）

§1. はじめに

毎年その年度を使った問題が，大学入試で出題される。今年の「2015」という数値でどのような出題がなされるのか予想問題を作るなど注目していたが，東京大学で出題された。(他には早稲田大学商学部の問題で出題されているようである。) 東京大学の問題は，いわゆる一行問題として美しさをもっているが，その周辺を分析してみた。

§2. 問題と模範解答例

【前期　理科　第 5 問】

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

【解答例】

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015}{1}\times\frac{2014}{2}\times\cdots\cdots\times\frac{2016-k}{k}\times\cdots\cdots\times\frac{2016-m}{m} $$

である。m を 1 から順に大きくしたとき，分母に含まれる素因数 2 の個数と，分子に含まれる素因数 2 の個数について注目すればよい。

m が奇数の場合は考慮する必要がなく，m が偶数の場合を $m=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots$ と進めると，

$m=32$ のときに，$\dfrac{2016-32}{32}=\dfrac{1984}{2^5}=\dfrac{2^6\times31}{2^5}$ となり，初めて分子に 2 が残ることとなる。つまり，題意を満たすのは，$m=32$ である。

【解説】

詳細な解答としては，

$2016=2^5\times3^2\times7$ であり，$1\leqq k\leqq31$ の整数に対して，$k=2^n r$ は，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ であり，r は奇数とかけ，

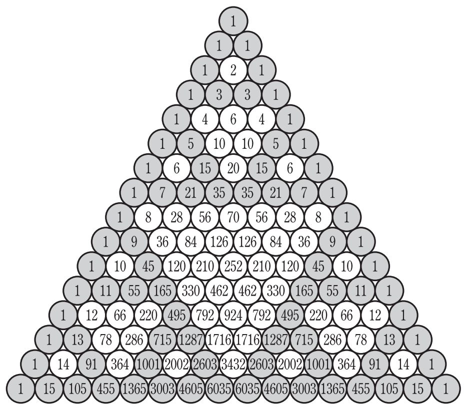
$$ \begin{aligned} 2016-k&=2^5\times3^2\times7-2^n r\\ &=2^n(2^{5-n}\times3^2\times7-r) \end{aligned} $$

の（　）内は，偶数－奇数＝奇数 であるから，分母と分子の 2 の個数は n 個で一致するため，全体の値も奇数となる，と言わなければならない。

しかし東大受験者といえども，大ざっぱには上記の解答例が，力技ながら多かった解答ではなかっただろうか。これはしらみつぶしに行っただけであり，解答の不備を指摘することは難しいが，決して美しいものとは言えないだろう。

§3. 自己相似図形として

シェルピンスキーのギャスケットという図形がある。フラクタルな性質をもつ，美しい図形であるが，二項定理と関係性は深い。



この図について解説をすると，パスカルの三角形において，奇数の項だけに色付けをしたものであるが，再帰性があり美しい図になっている。

【解説】

このような構造を知っているならば，段ごとに考えると，1 段目，2 段目，4 段目，8 段目，16 段目，…… と，2^n 段目はすべて奇数が並んでいることがわかる。したがって，$2^{11}=2048$ 段目はすべて奇数ということが分かる。問題の 2015 は，一番上は本来ならば 0 段目として考えるべきなので，2016 段目について考察すればよい。$2048-2016=32$ だから，この図を逆にたどると，32 個の奇数が並んだあと，初めて偶数の項が出ることが分かり，やはり本来ならば一番左は 1 番目ではなく，0 番目であることを考慮に入れると，0〜31 番目に奇数が並び，解答の $m=32$ において偶数となることが分かる。

【考察】

$2015=5\times13\times31$ と素因数分解されるが，13 も 31 も決して簡単な素数とは言い難い。問題を作るにあたってひらめきの要求されるような問題は，決して良問の部類には入らないだろう。そこで，2015 を 2 進数で表した，$11111011111_{(2)}$ から考察を始め，対称性から，$100000_{(2)}=32_{(10)}$ を考え，問題を作り出していったのではないかと推察するが，いかがだろうか。

§4. 別解として

構造上の特徴をつかんで別解を考えると，次のようなものも与えられるであろう。偶奇性をとらえて漸化式を利用した，一種の数学的帰納法である。

【別解】

$2016=2^5\times3^2\times7$ であるから，2016 は，32 の倍数であることが分かる。また，${}_xC_y$ の形は明らかに整数で ${}_{2016}C_m=\dfrac{2016}{m}\times{}_{2015}C_{m-1}$ であるから，$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 31$ までの自然数では，${}_{2016}C_m$ は偶数である。

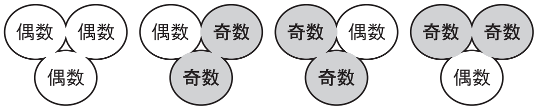
……①

ここで，$m=32$ について考えると，${}_{2016}C_{32}$ は分母分子の素因数 2 の個数は一致し，奇数である。……②

二項定理の成り立ちは，

$${}_{2015}C_{m-1}+{}_{2015}C_m={}_{2016}C_m$$

のように，1 つ前の状況から次の状況を作り出す。よって，①と，${}_{2015}C_0=1$（奇数）という状況から考えて，${}_{2015}C_m$（$m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 31$）は，奇数である。つまり，



ということである。

したがって，$m=32$ のとき，②より，

${}_{2015}C_{31}+{}_{2015}C_{32}={}_{2016}C_{32}$ が成り立っているから，${}_{2015}C_{32}$ が最初の（最小の）偶数であることが分かる。

§5. 来年の「2016」は？

ここで明らかになったように，2015 が登場する問題ではあるが，2016 の素因数分解が使われ，解が求まっている。つまり，東京大学は，「1 年分のフライングを意図的にやってしまった。」と言えないだろうか。では私も悪乗り便乗させていただいて，数題予想しておく。

【来年の予想 1】

問題：$\sqrt{2016k}$ が整数となる最小の自然数 k を求めよ。

解答：$2016=2^5\times3^2\times7$ である。

よって，$k=2\times7=14$ のときが根号のはずれる最小値である。

【来年の予想 2】

問題：$\log_{10}2016$ の近似値を求めよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ である。

解答：$\log_{10}2016=\log_{10}(2^5\times3^2\times7)$

$=5\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}7$

ここで，$\log_{10}7$ が問題となるが，

$$\log_{10}7^2\fallingdotseq\log_{10}50=\log_{10}\frac{100}{2}=2-\log_{10}2=1.6990$$

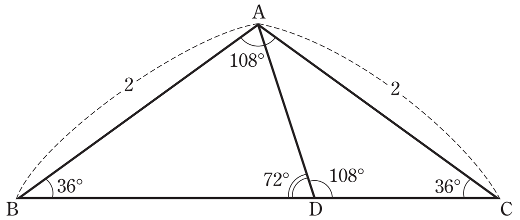
より，$\log_{10}7\fallingdotseq0.8495$

程度でほぼ○を与えてよいのではないだろうか。

【来年の予想 3】

問題：$\sin 2016^\circ$ の値を求めよ。

解答：$2016=360\times5+216$ であり，$216=180+36$ より，$\sin 2016^\circ=-\sin 36^\circ$ である。これは，



の有名な二等辺三角形で解決し，$AB=BD=2$，また $AD=DC=x$ とおき，$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ であることを利用して，$AB:BC=DA:AC$

$2:(2+x)=x:2$ つまり，$x(x+2)=4$ の 2 次方程式を解き，$x=\sqrt{5}-1$，$BC=BD+DC=\sqrt{5}+1$

A から辺 BC に下ろした垂線の足を E とすると，

$BE=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ だから，$\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ より求まる。

【来年の予想 4】

問題：2016^3 を 28 で割ったときの余りと，3^{2016} を 28 で割ったときの余りは，どちらがどれだけ大きいか調べよ。

解答：$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ であるから，

$\dfrac{2016^3}{28}=\dfrac{(2^5\cdot3^2\cdot7)^3}{2^2\cdot7}$ となり，約分できるので割り切れる。したがって，余りは，0 である。

一方，$3^3=27$ だから，$3^3\equiv-1 \pmod{28}$ である。

平方して，$3^6\equiv1$ である。$2016=6\cdot336$ より，

$3^{2016}\equiv(3^6)^{336}\equiv1$ が分かる。

したがって，3^{2016} を 28 で割ったときの余りの方が，1 だけ大きいことが分かる。

§6. おわりに

限られた時間の中で解かねばならない入試問題は，極度の緊張感の中で行われるため，エレガントな解法を追い求めるよりも，力づくで，美しさなどを感じる余裕なく書き切らねばならない。それは採点者も分かっていることだろうが，多くの受験者の中できらりと光るセンスを見せる答案には，なんらかのアドバンテージを与えたいものである。決して私の解答例が美しいと言っているわけではないことをご理解いただいたうえでコメントしたい。入試では難しいだろうが，100 点満点の試験に対し，120 点を与えてもいい場面があるのではないだろうか。

http://www.synapse.ne.jp/dozono/

上記の私のホームページにおいて，今回のシェルピンスキーのギャスケットの動画を公開している。興味ある方はご覧いただいて，ご指摘やご教授頂けると幸いである。

《参考文献》

〔1〕 初めてのフラクタル　数学とプログラミング
Hans Lauwerier 著　西川利男訳
丸善株式会社

〔2〕 虚数の情緒
吉田武著　東海大学出版会

〔3〕 色分けパスカル （フリーソフト）
http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/soft/

（鹿児島県立鹿児島中央高等学校）