二項係数についての入試問題から

裏 俊男（うら としお）

§1. はじめに

過去，その年の西暦年を盛り込んだ入試問題がしばしば出題されてきた。今年西暦 2015 年は，

$(2015)_{10}=(11111011111)_2$

という特徴があった。

これを使ったなんらかの出題があるのではと予想（期待？）していたが，今年の東大入試の 1 問

『${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ』

はこの特徴に関連した出題だった。

§2. 解法

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015\,!}{m\,!\,(2015-m)\,!}$$

が 2 の倍数かどうかは，右辺を素因数分解し，素因数 2 の冪を調べればよい。

n 以下の自然数のうち，k の倍数であるものの個数は

$$\left[\frac{n}{k}\right]\quad（[\ \ ]はガウス記号）$$

であるから，階乗 $n!$ を素因数分解したときの，素因数 p の冪は

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

で求められた。

（実際は有限和であり，和をとる範囲 $k=1\sim\infty$ の ∞ は大げさだが，詳しく書くのも面倒だからそのままで…）

したがって，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ を素因数分解したときの，素因数 2 の冪は

$$\left[\frac{2015}{2}\right]+\left[\frac{2015}{2^2}\right]+\left[\frac{2015}{2^3}\right]+\cdots\cdots$$
$$-\left\{\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}\right]+\left[\frac{m}{2^3}\right]+\cdots\cdots\right\}$$
$$-\left\{\left[\frac{2015-m}{2}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^2}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^3}\right]+\cdots\cdots\right\}$$

これは

$$=\left\{\left[\frac{2015}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{2015-m}{2}\right]\right\}$$
$$+\left\{\left[\frac{2015}{2^2}\right]-\left[\frac{m}{2^2}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^2}\right]\right\}$$
$$+\left\{\left[\frac{2015}{2^3}\right]-\left[\frac{m}{2^3}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^3}\right]\right\}$$
$$+\cdots\cdots$$

と変形し，

$$[a+b]-[a]-[b]\geqq 0$$

だから，この各｛ ｝のいずれかが 0 にならないような最小の m を求める，という考えに導かれる。

この数の特徴を活かせば，「最小の」はひとまずおいて，

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]\fallingdotseq 0$$

となる m の候補として，直ちに $m=2^5$ があげられる。実際，

$$\begin{aligned}(2015)_{10}&=(11111011111)_2\\&=(11111100000)_2-1\\&=2^{10}+2^9+\cdots\cdots+2^5-1\end{aligned}$$

より，$m=2^5$，$k=6$ のとき

$$\begin{aligned}\left[\frac{2015}{2^6}\right]&=\left[\frac{2^{10}+2^9+\cdots\cdots+2^5-1}{2^6}\right]\\&=\left[\frac{2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6}{2^6}+\frac{2^5-1}{2^6}\right]\\&=2^4+2^3+2^2+2+1\end{aligned}$$

$$\left[\frac{m}{2^6}\right]=\left[\frac{2^5}{2^6}\right]=0$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{2015-m}{2^6}\right]&=\left[\frac{2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6-1}{2^6}\right]\\&=\left[\frac{2^{10}+2^9+2^8+2^7}{2^6}+\frac{2^6-1}{2^6}\right]\\&=2^4+2^3+2^2+2\end{aligned}$$

よって，$m=2^5$ とすると，$k=6$ に対して

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]=1\fallingdotseq 0$$

あとは，$m<2^5$ である m に対して，

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]=0$$

（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）（＊）

となることが§3のようにして容易にわかるので，$m=2^5$ が求める答，ということになる。

§3. 2進数とシフトレジスタ

自然数は計算機の中で，2進数の形で扱われる。2015は11ビットのレジスタによって，

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

と表されている。

計算機の中では，「÷2」という計算は，レジスタの中の値を1つ右にずらす（1ビット右シフトする）ことで実現される：

$$0\rightarrow\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\\hline\end{array}\rightarrow\times$$

$$\therefore\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

ここで，最上位のビットには0が入り，最下位のビットは捨てられる。「÷2^k」ならk回（kビット）右シフトすればよい。すなわち，

$$\left[\frac{l}{2^k}\right]=\text{値 } l \text{ の入ったレジスタを}$$
$$k\text{ビット右シフトしたもの}$$

さて，$m<2^5$ である整数 m は計算機の中で，

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&0&m_4&m_3&m_2&m_1&m_0\\\hline\end{array}$$

（ただし，各 $m_i=0,\ 1$）

と表される。

2015の2進数表現は都合よく下5桁はすべて1なので，$2015-m$ は，

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&m'_4&m'_3&m'_2&m'_1&m'_0\\\hline\end{array}$$

（ただし，各 $m'_i=1-m_i$）

と表される。

したがって，以下の3つのレジスタを同時にどのようにkビット右シフトしようとも，上2つのレジスタの和は，3つ目のレジスタの値に等しい。

$$m=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&0&m_4&m_3&m_2&m_1&m_0\\\hline\end{array}$$

$2015-m$

$$=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&m'_4&m'_3&m'_2&m'_1&m'_0\\\hline\end{array}$$

$$2015=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

すなわち

$$\left[\frac{m}{2^k}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]=\left[\frac{2015}{2^k}\right]$$

$$\therefore\quad\left[\frac{2015}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]=0$$

（（＊）の証明終）

$m=2^5$，$k=6$ のとき

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]-\left[\frac{m}{2^k}\right]-\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]\neq0$$

であることも，シフトレジスタにのった2進数を思い浮かべれば簡単だったかもしれない：

$$2015=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

$$2^5=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\\hline\end{array}$$

$$2015-2^5=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\\hline\end{array}$$

6ビット右シフトしたところで

$$\left[\frac{2015}{2^6}\right]-\left[\frac{2^5}{2^6}\right]-\left[\frac{2015-2^5}{2^6}\right]\neq0$$

§4. 類題

数 n が同様の特徴をもつ場合の ${}_nC_m$ について類題を考えてみた：

『${}_{2105}C_m$ が3の倍数となる最小の m を求めよ』

答．$m=2\cdot3^4=162$

（解）$(2105)_{10}=(2212222)_3$ である。

3進数を格納できるレジスタがあったとすると，

$$\left[\frac{l}{3^k}\right]=\text{値 } l \text{ の入ったレジスタを}$$
$$k\text{回右シフトしたもの}$$

であり，

$$2105=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2&2&1&2&2&2&2\\\hline\end{array}$$

$$2\cdot3^4=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&2&0&0&0&0\\\hline\end{array}$$

$$2105-2\cdot3^4=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&2&2&2&2&2\\\hline\end{array}$$

だから，5回右シフトすれば，

$$\left[\frac{2105}{3^5}\right]-\left[\frac{2\cdot3^4}{3^5}\right]-\left[\frac{2105-2\cdot3^4}{3^5}\right]\neq0$$

よって，${}_{2105}C_{2\cdot3^4}$ は3の倍数である。

また，$m<2\cdot3^4$ とすると

$$m=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&m_4&m_3&m_2&m_1&m_0\\\hline\end{array}$$

ただし，$m_4=0,\ 1$　$m_3,\ m_2,\ m_1,\ m_0=0,\ 1,\ 2$

よって，

$$2105-m=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2&2&m'_4&m'_3&m'_2&m'_1&m'_0\\\hline\end{array}$$

$m'_4=1-m_4$　$m'_i=2-m_i$（$i=3,\ 2,\ 1,\ 0$）

何回右シフトしようとも（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）

$$\left[\frac{m}{3^k}\right]+\left[\frac{2105-m}{3^k}\right]=\left[\frac{2105}{3^k}\right]$$

だから，

$$\left[\frac{2105}{3^k}\right]-\left[\frac{m}{3^k}\right]-\left[\frac{2105-m}{3^k}\right]=0$$

よって，$2\cdot3^4$ が求める最小の m である。

（東京都立小山台高等学校）