サインポール

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

§1. サインポール

街を歩いていて，理髪店のサインポールが目に入り，咄嗟に２つの興味が湧いた。

サインポールは，回転することによって，平行四辺形に似た模様が等速で平行移動しているように見える。その平行移動の速さ，サインポールの半径，回転数，傾斜角の間に関係がある筈で，具体的にその関係を掴みたい。

また，その射影図としての模様がどのような曲線で囲まれているかについても考察したい。

§2. 速さ，半径，回転数，傾斜角の関係

サインポールを見て最も興味深いのは，平行四辺形に似た模様が平行移動しているように見える様子である。そこで，その平行移動の速さが，半径，回転数，傾斜角にどのように依存しているかという視点で考えたい。

平行移動の速さを y cm/秒，半径を r cm，回転数を ρ 回転/秒，傾斜角を θ とおき，y を r，ρ，θ の３変数関数として表す。

図１は，底面の半径が r cm の円柱で，図２は，その円柱の側面の展開図で，
AB＝BC＝CD＝GH＝HI＝IJ，
AE＝EG＝DF＝FJ＝πr (cm)，EH∥AI∥BJ∥CF，
∠GAI＝θ とする。

図１

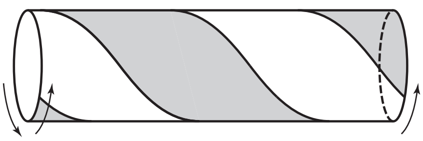


図２

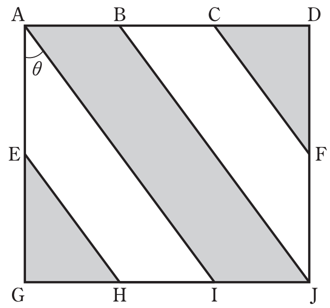
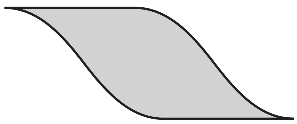


図１の矢印の方向に，毎秒 ρ 回転の等速回転を続けるとき，真正面から見ると，模様



が連なって右へ等速で平行移動しているように見え，この平行移動の速さが y cm/秒である。

図３のように，円柱の回転軸と，回転軸に平行な直線 ℓ を固定し，ℓ に接している部分を円柱の最上部とする。回転軸と ℓ を含む平面を“平面 α”とすると，模様は，平面 α から手前側の曲面に描かれている影の部分であり，平面 α への射影図と考えてよい。ℓ 上において点Ｐを模様の左上の頂点とすると，模様の平行移動の速さ y cm/秒は，点Ｐが直線 ℓ 上を右へ移動する速さに等しい。

図３

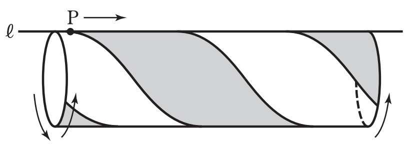
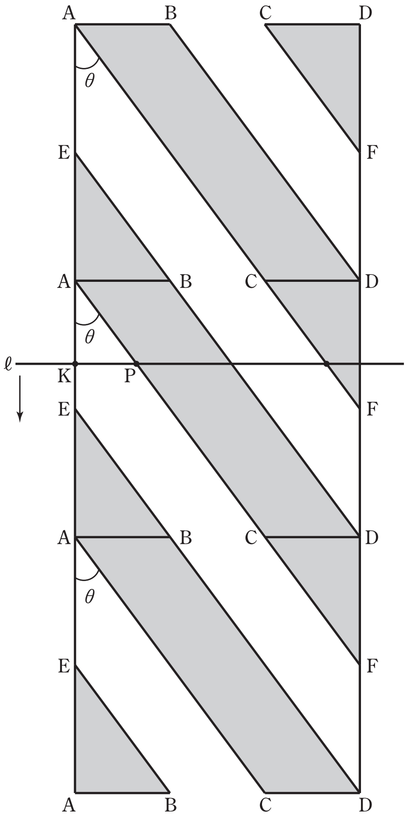


図4は，図2の展開図を限りなく連ねたものの一部であり，A，B，C，DとG，H，I，Jは各々一致するので，A，B，C，Dで統一して表すこととする。直線ℓが図4の上を，AD$/\!/\ell$ を保ちながら矢印の方向に等速で移動していくと考え直すとき，ℓと直線AFの1つとの交点が点Pである。ただし，2つの直線AFと交点をもつときは，左側の交点の方をPとする。ℓと直線AEとの交点をKとする。今導きたい点Pの速さは，図4において点Pが直線ℓに沿って点Kから離れていく速さに等しい。

図4



円柱は$\dfrac{1}{\rho}$秒間で1回転する。例えば，ℓが直線ADの1つと重なるときから，次の直線ADに重なるまでが1回転だが，その間に点Kは，点Aから次の点Aまで移動する。これを“A_1からA_2まで移動”と呼ぶことにすると，$A_1A_2=2\pi r$ cm だから，点Kは直線AE上を“$\dfrac{1}{\rho}$秒間で$2\pi r$ cm”という割合の等速で進む。それに対し，$KP=A_1K\tan\theta$だから，点Pはℓ上を“$\dfrac{1}{\rho}$秒間で$2\pi r\tan\theta$ cm”という割合の等速で進む。よって，点Pのℓ上を進む速さは，毎秒$2\pi r\rho\tan\theta$ cmとなり，

$$y=2\pi r\rho\tan\theta$$

という関係が得られる。

§3. 模様を囲む曲線

次に，模様を囲む曲線について調べる。

図2においてAI，BJの中点を各々L，Mとする。図3において点A，B，C，D，G，H，I，Jがすべて直線ℓ上にある瞬間を考えたとき，平行四辺形ALMBが1つの模様を形成するが，側面上に見える模様は，図5のように平行な2線分AB，LMと平行移動の位置関係の2曲線AL，BMの4つで囲まれている。

そこで，曲線ALの方に着目し，どのような曲線であるかを考察する。

図5

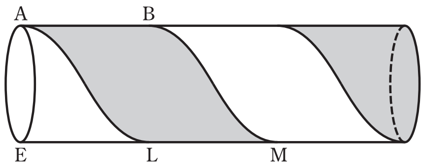
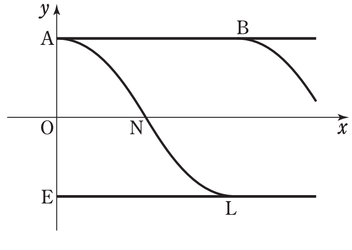


図6は曲線ALを平面αに射影したもので，AEの中点を原点Oとし，Oを通りELに平行な直線にx軸を，直線AEにy軸を重ねる。図6における曲線ALの方程式を $y=f(x)$ とおく。曲線ALとx軸の交点をNとすると，A，N，Lの座標は

$A(0,\ r)$，$N\left(\dfrac{\pi}{2}r\tan\theta,\ 0\right)$，$L(\pi r\tan\theta,\ -r)$である。

図6



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}r\tan\theta$ の場合と $\dfrac{\pi}{2}r\tan\theta<x\leqq\pi r\tan\theta$ の場合で，各々 $f(x)$ を調べる。

◎　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2} r\tan\theta$ の場合

図6において，x 軸上に点 $X_0(x,\ 0)$，曲線 AN 上に点 $X_1(x,\ f(x))$ をとる。

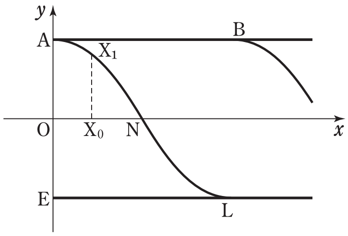


図7は，側面上としての2点 X_0，X_1 を直径 AE を含む底面に射影したもので，中心をO_0とする。点 X_1 から半径 O_0X_0 に垂線 X_1X_2 をおろすと，

$$f(x)=X_1X_2=r\sin\angle X_1O_0X_0=r\sin\left(\frac{1}{r}\overset{\frown}{X_1X_0}\right) \quad \cdots(*)$$

である。

図7

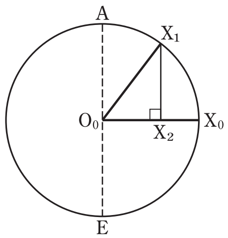
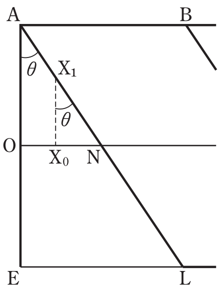


図8は，図2の一部で，図6を平面化したものである。

図8



$$(\text{図7における }\overset{\frown}{X_1X_0})=(\text{図8における }X_1X_0)$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}r\tan\theta-x\right)\frac{1}{\tan\theta}$$
$$=\frac{\pi}{2}r-\frac{x}{\tan\theta}$$

これと（＊）より

$$f(x)=r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{r\tan\theta}\right)=r\cos\left(\frac{x}{r\tan\theta}\right)$$

◎　$\dfrac{\pi}{2}r\tan\theta < x \leqq \pi r\tan\theta$ の場合

図6において，x 軸上に点 $X_0(x,\ 0)$，曲線 NL 上に点 $X_1(x,\ f(x))$ を $\dfrac{\pi}{2}r\tan\theta < x \leqq \pi r\tan\theta$ としてとり，同様な考察により $f(x)=r\cos\left(\dfrac{x}{r\tan\theta}\right)$ を得る。

§4. 結論と例

サインポールにおいて，半径を r (cm)，回転数を ρ (回転/秒)，模様の傾斜角を θ とするとき，模様の平行移動の速さ y (cm/秒) は，

$$y=2\pi r\rho\tan\theta$$

である。

また，模様を囲む図形は，平行で長さの等しい2線分と，半周期分の正弦曲線

$$y=r\cos\left(\frac{x}{r\tan\theta}\right)\ (0 \leqq x \leqq \pi r\tan\theta)$$

と合同な平行移動の位置関係の2曲線である。

例えば，半径10 cm，毎秒1.6回転，傾斜角45°の場合，模様の平行移動の速さは，

$2\pi\times10\times1.6\times1=32\pi$　ほぼ1 m/秒である。

模様を囲む曲線の一つは，曲線

$y=10\cos\left(\dfrac{x}{10}\right)$（$0 \leqq x \leqq 10\pi$）である。

一般に曲線 $y=k\cos\left(\dfrac{x}{k}\right)$（$k>0$）は曲線 $y=\cos x$ と相似であるから，特に傾斜角45°の場合は曲線 $y=\cos x$（$0 \leqq x \leqq \pi$）で囲まれていると考えてよい。

（愛知県　名古屋国際中学校・高等学校）