影の軌跡

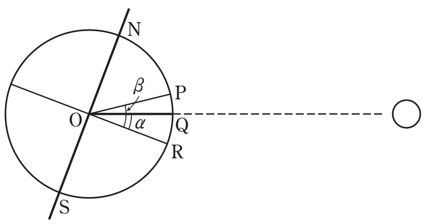
森島 充（もりしま みつる）

地面に立てた棒の，影の先端の軌跡について考えます。

§1. 座標軸の決定

図1は地球を表したものです。

図1



直線NSが地軸で，点Oが中心，Rは赤道上の点，半直線OQが太陽の方向です。点Pは観測者のいる場所で，ここに棒を立てます。最初は点Pにおける時刻は正午とし，**図1**の点はすべて同一平面上にあるものとします。

α，β は半直線ORを始線とする一般角です。

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として，α が正のときは，おおむね北半球が夏，南半球は冬です。負のときは逆で，$\alpha=0$ は春分と秋分です。β が正のときは，観測者は北半球にいます。

この正午の状態から地球をまわすのですが，地球がまわると考えても，太陽がまわると考えても同じなので，座標軸を定めやすいように，点Pを「真上」に移動させて固定し，半直線OQが直線NSの周りを回転すると考える事にします。

そして，**図2**のように，点Oを原点として，直線OPを z 軸，点O，P，N，Sが乗る平面を yz 平面とします。

図3は，回転の様子を立体的に描いたものです。

図2

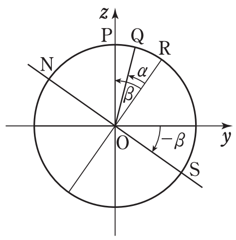
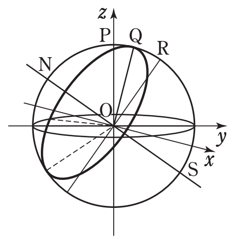


図3



§2. 軌跡の計算

次に，計算のために，**図3**の球は地球ではなく，半径1の球とします。例えば，半径1 mの球が観測者の前にあると思ってください。太陽は十分遠いので，この球を用いて各種方向ベクトルを考えることにします。各点の名前や座標軸はそのまま用います。

そして，立てる棒の先端に原点Oを置き，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は天頂の方向，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を太陽の方向，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を北極星の方向と考えます。

立てる棒の長さは1とします。地球も十分大きいので，平面 $z=-1$ を地面とします。xy 平面は地面に平行で，地面との距離が1の水平面です。

図3の太い線の円は，$\alpha>0$ のときの点Qの軌跡です。$\alpha=0$ のときは，点Qは点Rに一致して，軌跡は大円となり，$\alpha<0$ のときは，点Qの軌跡は点Rより点S側の円となります。α の値がいずれの場合も，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の z 成分が正の時が太陽が水平面よりも上側，つまり日が出ている時間です。

蛇足ですが，**図3**では，日中の方が夜間より時間が長いことが，点Qの軌跡から分かります。

回転する半直線OQによって出来る，点Oを頂点とする円錐面上を太陽は「回転」していきます。影は太陽と反対側ですから，半直線OQを逆に伸ばして出来る円錐面と地面（平面 $z=-1$）の共有部分が求める棒の先端の軌跡です。

以下は軌跡の計算です。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(X,\ Y,\ Z)$（ただし，$X^2+Y^2+Z^2=1$）

とします。**図 2** より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(0,\ \cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$$
$$=(0,\ \cos\beta,\ -\sin\beta)$$

$$\angle\mathrm{QOS}=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

ですから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

$$Y\cos\beta-Z\sin\beta=-\sin\alpha$$

となります。

点 O を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とすると，直線 ℓ の方程式は，

$$(x,\ y,\ z)=t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=(Xt,\ Yt,\ Zt)$$

です。

$Z>0$ のとき，直線 ℓ と平面 $z=-1$ との交点を T とします。点 T において，

$$Zt=-1\ (t<0)$$

ですから，点 T の座標は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(-\frac{X}{Z},\ -\frac{Y}{Z},\ -1\right)\ (Z>0)$$

です。

以上を整理すると次の連立式になります。

$X^2+Y^2+Z^2=1$ …①

$Y\cos\beta-Z\cos\beta=-\sin\alpha$ …②

$x=-\dfrac{X}{Z}$ …③

$y=-\dfrac{Y}{Z}$ …④

$Z>0$ …⑤

①，②は，**図 3** で見た点 Q の軌跡の円が，確かに球面と x 軸に平行な平面の共有部分であることを示しています。

②，④から Y を消去すると，

$Z(y\cos\beta+\sin\beta)=\sin\alpha$ …⑥

となります。$Z>0$ ですから，

［1］ $\alpha=0$ のとき

⑥から

$$y\cos\beta+\sin\beta=0$$

$\beta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき，式を満たす y は存在しない。

$\beta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y=-\tan\beta$ …⑦

（つまり，春分，秋分の時，両極では点 T が存在せず，両極以外では点 T の軌跡は直線）

［2］ $\alpha\neq0$ のとき

⑥から

$Z=\dfrac{\sin\alpha}{y\cos\beta+\sin\beta}$ …⑧

①，③，④，⑧から X，Y，Z を消去すると，

$x^2\sin^2\alpha+y^2(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)$

$-2y\sin\beta\cos\beta+\sin^2\alpha-\sin^2\beta=0$ …⑨

という，平面 $z=-1$ 上の 2 次曲線の方程式が得られます。

ただし，$Z>0$ と⑥より

$\sin\alpha$ と $y\cos\beta+\sin\beta$ の正負は一致する

という条件がつきます。

§3. いくつかの例

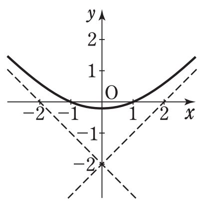
§2 の⑨を分類して標準形にすることも出来ますが，あまりきれいな式にはならないようです。

ここでは具体例で点 T の軌跡を見てみましょう。すべて平面 $z=-1$ 上で考えます。

例 1　$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

北半球の北回帰線より北側の夏をイメージしていますが，α，β の値は計算が楽になるように定めました。このとき⑨より，

$$x^2-y^2-4y-1=0$$



ただし，$\sin\dfrac{\pi}{6}>0$ より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}>0$$
$$y>-1$$

よって，

$$y=-2+\sqrt{x^2+3}$$

グラフでは上が南です。太陽は北東から昇り，天頂のやや南側を通って北西に沈み，影は南西から棒の北側をまわり込んで南東に移動します。

$\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$ とすると，$y=-2-\sqrt{x^2+3}$ です。

例 2　$\alpha=0$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

春分，秋分の日。北緯 45° です。

⑦より，

$$y=-1$$

例 3　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき

北極圏の夏をイメージしています。計算が楽になるように地軸をかなり傾けました。

⑨より，

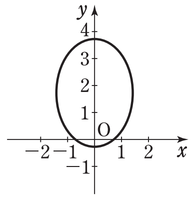
$$x^2+\frac{1}{2}y^2-\sqrt{3}\,y-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(y-\sqrt{3})^2}{4}=1$$

ただし，$\sin\dfrac{\pi}{4}>0$ より

$$\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

$$y>-\sqrt{3}$$



ですから，楕円全体が点Tの軌跡となります。

$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$ とすると，点Tの軌跡は存在しません。

（東京都立調布南高等学校）