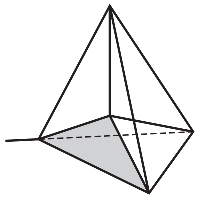
正四面体の6辺の枠に張る石鹸膜の面積と正四面体の表面積との比較

岡本(おかもと)　雅史(まさし)

§1. はじめに

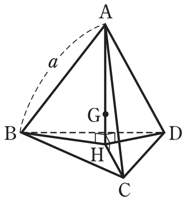
よく知られていることであるが，6辺の枠を針金で作った四面体にシャボン玉の液をつけると，四面体の表面に膜が張るという大方の予想に反し，四面体の重心から各辺の枠に向かって張る6つの三角形の膜（極小曲面）ができる。これは表面張力により石鹸膜が四面体の枠に張る面積を最小にする（最小作用の原理）からである。（文献〔1〕）



四面体の6辺の枠に張る石鹸膜の面積と四面体の表面積を比較する。計算を容易にするため正四面体で考える。

§2. 考察

1辺の長さがaの正四面体ABCDにおいて，頂点Aから△BCDに垂線AHを下ろす。



△ABH，△ACH，△ADHはいずれも直角三角形で，AB＝AC＝AD，AHは共通であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって　　BH＝CH＝DH

ゆえに，Hは△BCDの外心である。

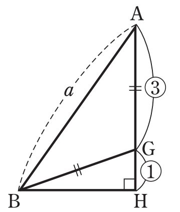
BHは△BCDの外接円の半径であるから，正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}$

よって　　$\mathrm{BH}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

△ABHは直角三角形であるから，三平方の定理により　$\mathrm{AH}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$　（文献〔2〕）

正四面体ABCDの重心をGとすると，△ABG，△ACG，△ADG，△BCG，△CDG，△DBGは合同な二等辺三角形である。

また，Gは線分AHを3：1に内分する点だから



$$\triangle \mathrm{ABG}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AG}\cdot \mathrm{BH}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}a\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$$

正四面体ABCDの6辺の枠に張った石鹸膜の面積をS_1とすると

$$S_1=6\triangle \mathrm{ABG}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}a^2=\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$$

一方，正四面体ABCDの表面積をS_2とすると

$$S_2=4\triangle \mathrm{ABC}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin 60^\circ=\sqrt{3}\,a^2$$

以上から　　$S_1：S_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}：\sqrt{3}$

よって　　$S_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}S_2=\dfrac{\sqrt{6}}{4}S_2 \fallingdotseq 0.6S_2$

思いの外S_1はS_2に比べ小さく，特異点（正四面体ABCDの重心）Gの重要性に気付かされる。

なお，立方体の12辺の枠に張る石鹸膜も興味深い。

《参考文献》

〔1〕 小谷元子「サイエンスカフェ at 仙台」
数学セミナー 2006年7月号 *pp*.50〜54
日本評論社

〔2〕 数学Ⅰ *p*.154 応用例題6　数研出版

（埼玉県立春日部工業高等学校）