等脚台形と平均

松田（まつだ）　康雄（やすお）

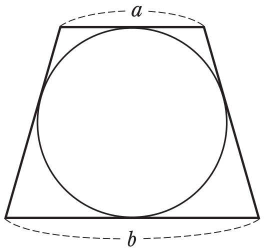
§0. はじめに

本稿では，円が内接している等脚台形の中にある平均について考える。

§1. 円が内接している等脚台形(1)

次の問題を考えてみよう。

問題 1．等脚台形に円が内接している。上底，下底の長さがそれぞれ a，b のとき，等辺の長さと内接円の直径を求めよ。



解答．等脚台形を ABCD とし，AD$=a$，BC$=b$ とする。内接円の中心を I，半径を r とする。面積に関して，

(台形 ABCD)

$=\triangle$IAB$+\triangle$IBC$+\triangle$ICD$+\triangle$IDA

が成り立つ。台形の高さは内接円の直径なので

$$r(a+b)=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+b+\mathrm{CD}+a)$$

となり，等辺の長さは

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\frac{a+b}{2}$$

となる。

Aから辺 BC に下ろした垂線の足をPとする。直角三角形 ABP において，三平方の定理から

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BP}^2$$

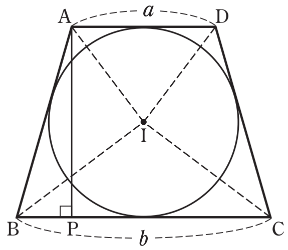
より

$$(2r)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=ab$$

なので内接円の直径は

$$2r=\sqrt{ab}$$

となる。　■

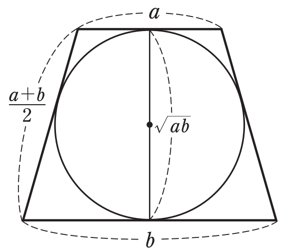


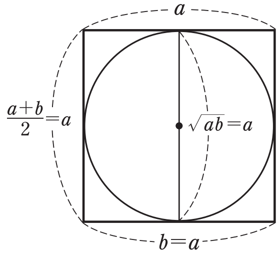
§2. 等脚台形の中の平均(1)

問題 1 から，等脚台形の等辺の長さは，上底と下底の相加平均，内接円の直径は相乗平均になっている。したがって，正の 2 数 a，b に対する相加平均，相乗平均の関係

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

が分かる。(見える。) さらに，等号成立は，$a=b$ で上底と下底の長さが等しくなって，等脚台形が正方形になるとき，そのときに限ることも分かる。

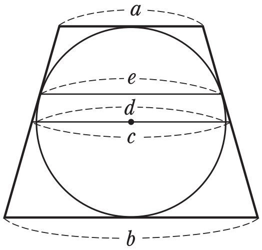




§3. 円が内接している等脚台形(2)

今度は次の問題を考えてみよう。

問題 2． 等脚台形に円が内接している。台形の上底の長さを a，下底の長さを b，等辺の中点を結ぶ線分の長さを c，内接円の直径を d，内接円と等辺の接点を結ぶ線分の長さを e とする。このとき，c，d，e をそれぞれ a，b で表せ。



略解． c は等辺の中点を結ぶ線分の長さなので

$$c=\frac{a+b}{2}$$

問題 1 の結果から

$$d=\sqrt{ab}$$

等脚台形 ABCD について，内接円と辺 AD，BC，AB, CD との接点をそれぞれ E，F，P，Q とする。

AP＝AE，BP＝BF

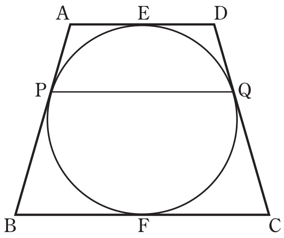
なので，

AP：BP＝AE：BF＝AD：BC＝a：b

したがって，P，Q はそれぞれ辺 AB，DC を a：b に内分する点なので，

$$e=\mathrm{PQ}=\frac{b\times \mathrm{AD}+a\times \mathrm{BC}}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}$$

となる。 ■



問題 2 から，

$$c\geqq d\geqq e$$

なので，正の 2 数 a，b に対する相加平均，相乗平均，調和平均の関係

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}$$

が分かる。(見える。) さらに，等号成立は，$a=b$ で上底と下底の長さが等しくなって，等脚台形が正方形になるとき，そのときに限ることも分かる。

§4. おわりに

問題 1 の答は和算の時代から知られていた結果のようである。(〔 2 〕)

具体的に平均が見えること，円が内接している等脚台形という身近な図形の中に平均が隠れていることは興味深いことだと思える。

《参考文献》

〔 1 〕 飯島忠，均して得るいろいろな平均，話題源数学，とうほう，1989 年発行，98～99

〔 2 〕 松原一記，算矩堂，明治 7 年発行

(福岡県　久留米工業高等専門学校)