$\log(\sqrt{2}+1)$ の値を筆算する

裏（うら）　俊男（としお）

§1. はじめに

3年生の数学Ⅲの夏休みの宿題として，関数のグラフ作成を課した中に

「$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフの変曲点を求めよ。」

という問題を入れた。

変曲点は，$\left(\pm\log(\sqrt{2}+1),\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ である。変曲点の x 座標と y 座標を求めるのが題意だから，図示する必要はないのだが，グラフの概略を書き，変曲点を入れるとすると，y 座標は問題なかろうが，x 座標のほうは…？

「$\sqrt{2}+1=2.4142\cdots$，$e=2.7182\cdots$ で
$\sqrt{2}+1$ は e よりちょっと小さいから
$\log(\sqrt{2}+1)$ は1よりちょっと小さい値」

教室の黒板でグラフを書いてみせるとき，これで全く問題なかろうが，「1よりちょっと小さい値」って，具体的には？

関数電卓など，それを必要としない人のスマートフォンの中にもアプリとして入っている時代である。とりあえず値を知るのはわけない。

$\log 2.41421356=0.88137358\cdots\cdots$

しかし，電卓に頼らずとも計算できることは確認しておきたいものである。

§2. 常用対数と同じように

常用対数の場合は，

$2^{10}\fallingdotseq 10^3$ より，$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3$

$3^4\fallingdotseq 2^4\cdot 5$ より，$\log_{10}3\fallingdotseq 0.475$　等々

というのがあった。

同様のことをしてみる。

$e^1\fallingdotseq 2.7=\dfrac{3^3}{2\cdot 5}$ より，　$1=-\log 2+3\log 3-\log 5$

$e^3\fallingdotseq 20=2^2\cdot 5$ より，　$3=\ 2\log 2 \qquad\qquad +\log 5$

$e^5\fallingdotseq 144=2^4\cdot 3^2$ より，$5=\ 4\log 2+2\log 3$

（e^3 は，$e=2.7$ とすると $e^3=19.683$
　　$e=2.7182\cdots$ とすると $e^3=20.0855\cdots$
となるので，$e^3\fallingdotseq 20$ は問題なかろうが，
e^5 は，$e=2.7$ とすると $e^5=143.4890$
　　$e=2.7182\cdots$ とすると $e^5=148.4131\cdots$
となるので，$e^5\fallingdotseq 144$ は少々くい違うが，
$144=2^4\cdot 3^2$ だから都合がよい。）

この連立方程式を解いて

$\log 2\fallingdotseq 0.7$，$\log 3\fallingdotseq 1.1$，$\log 5\fallingdotseq 1.6$

を得るので，

$$\begin{aligned}\log(\sqrt{2}+1)&\fallingdotseq \log 2.4=\log\frac{2^2\cdot 3}{5}\\&=2\log 2+\log 3-\log 5\\&\fallingdotseq 2\times 0.7+1.1-1.6\\&=0.9\end{aligned}$$

§3. もうちょっと精密に

物理の本〔1〕に常用対数を計算する方法が紹介されていたのを思い出し，同じ方法を使ってみた。

開平の筆算の仕方は参考書（〔2〕など）や，教科書によっては紹介されており，開平 $\sqrt{\quad}$ は $\dfrac{1}{2}$ 乗することだから，繰り返すことによって結局，対数が $\dfrac{1}{2^n}$ となる真数の値を筆算できることになる。これを用いて，与えられた真数の対数を2進展開

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots\cdots,\ (a_n=0,\ 1)$$

の形で求めようというのがアイデアである。

以下，具体的に計算してみる。

まず，開平を筆算して各 $e^{\frac{1}{2^n}}$ を準備する。

$e=2.71828$ とすると

$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\fallingdotseq 1.64872,$

$e^{\frac{1}{4}}=\sqrt{e^{\frac{1}{2}}}\fallingdotseq 1.28402,$

$e^{\frac{1}{8}}=\sqrt{e^{\frac{1}{4}}}\fallingdotseq 1.13315,$

$$e^{\frac{1}{16}}=\sqrt{e^{\frac{1}{8}}}\fallingdotseq 1.064495,$$
$$e^{\frac{1}{32}}=\sqrt{e^{\frac{1}{16}}}\fallingdotseq 1.031744,$$
$$e^{\frac{1}{64}}=\sqrt{e^{\frac{1}{32}}}\fallingdotseq 1.015748,$$
$$e^{\frac{1}{128}}=\sqrt{e^{\frac{1}{64}}}\fallingdotseq 1.0078432,$$
$$e^{\frac{1}{256}}=\sqrt{e^{\frac{1}{128}}}\fallingdotseq 1.0039139,$$
$$e^{\frac{1}{512}}=\sqrt{e^{\frac{1}{256}}}\fallingdotseq 1.0019550,$$
$$e^{\frac{1}{1024}}=\sqrt{e^{\frac{1}{512}}}\fallingdotseq 1.00097702$$

次に，$e^{\frac{1}{2^n}}$ を順次くくり出す。

$\sqrt{2}+1=2.41421$ として，

$$e^{\frac{1}{2}}<\sqrt{2}+1<e$$

だから，(割り算ももちろん筆算する)

$$(\sqrt{2}+1)\div e^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq\frac{2.41421}{1.64872}\fallingdotseq 1.46429$$
$$e^{\frac{1}{4}}<\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}}<e^{\frac{1}{2}}$$

だから，

$$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}}\div e^{\frac{1}{4}}\fallingdotseq\frac{1.46429}{1.28402}\fallingdotseq 1.14040$$
$$e^{\frac{1}{8}}<\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}}<e^{\frac{1}{4}}$$

だから，

$$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}}\div e^{\frac{1}{8}}\fallingdotseq\frac{1.14040}{1.13315}\fallingdotseq 1.0063981$$
$$e^{\frac{1}{256}}<\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}}<e^{\frac{1}{128}}$$

だから，

$$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}}\div e^{\frac{1}{256}}\fallingdotseq\frac{1.0063981}{1.0039139}\fallingdotseq 1.0024745$$
$$e^{\frac{1}{512}}<\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}e^{\frac{1}{256}}}<e^{\frac{1}{256}}$$

だから，

$$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}e^{\frac{1}{256}}}\div e^{\frac{1}{512}}\fallingdotseq\frac{1.0024745}{1.0019550}\fallingdotseq 1.00051849$$

〔1〕では微分の知識を前提とせず，各 $10^{\frac{1}{2^n}}$ の計算において，$s=\frac{1}{2^n}$ が小さくなってゆくと$\left(\frac{1}{2}\right.$乗する毎に小数点以下が半減してゆく様子から$\left.\right)$ $\frac{10^s-1}{s}$ がほぼ一定値の 2.3025 (実は $\log_e 10$) になることを観察し，

$$\frac{10^s-1}{s}\fallingdotseq 2.3025$$

より

$$10^s\fallingdotseq 1+2.3025s$$

すなわち $s=\frac{\varDelta}{1024}$ として

$$10^{\frac{\varDelta}{1024}}\fallingdotseq 1+\frac{2.3025\varDelta}{1024}$$

を使ってくくり出しの最後を閉めている。

これに倣い，各 $e^{\frac{1}{2^n}}$ の値の準備のところで，$s=\frac{1}{2^n}$ が小さくなれば

$$\frac{e^s-1}{s}\to 1$$

となる様子が見えるから (微分の理解があれば当然だが) 数Ⅲでも登場する1次近似式

$$e^s\fallingdotseq 1+s$$

が得られ，

$$1.00051849\fallingdotseq e^{0.00051849}$$

よって，

$$\frac{\sqrt{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}e^{\frac{1}{256}}e^{\frac{1}{512}}}\fallingdotseq e^{0.00051849}$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}+1\fallingdotseq e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}}e^{\frac{1}{256}}e^{\frac{1}{512}}e^{0.00051849}$$
$$=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+0.00051849}$$

結局，

$$\log(\sqrt{2}+1)$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+0.00051849$$
$$=0.881377865$$

筆算でも，小数点以下5桁まで正確に求めることができた。

《参考文献》

〔1〕 ファインマン物理学Ⅰ力学第22章代数 岩波書店
〔2〕 チャート式基礎からの数学Ⅰ＋A　数研出版

(東京都立小山台高等学校)