正多面体の計量と真球率

佐々木　正敏

§1. 目的

現行のカリキュラムでは，数学Aで正多面体の概要を学ぶ。数学Ⅱの加法定理を利用して，18°，36°の三角比の値が求まるから（頂角36°の二等辺三角形を用いても可能だが），正多面体の体積や表面積を求めることができる。ここでは正二十面体と正十二面体の体積を求めたい。あわせて内接球，外接球の半径の関係についても考察したい。

§2. 準備

計量にあたり以下の値は求めておく。

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\tan 18^\circ=\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

$$\sin 36^\circ=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

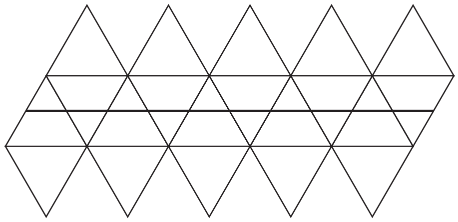
$$\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

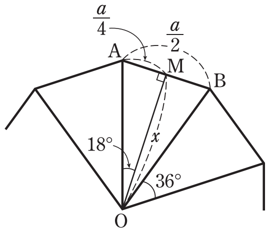
$$\tan 36^\circ=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

§3. 正二十面体

体積を求めるためには，内接球の半径が必要になる。正多面体では内接球と外接球の中心が一致するから，それらの中心を含む平面での立体の切り口が，よく知られた正多角形になればよい。

正二十面体を，向かい合う頂点を上下にして眺めると，真ん中に10個の面が輪を作っていることに気づく。10個の正三角形は上下が交互になっており，10個の正三角形の各辺の中点を結ぶと正十角形が得られる。この正十角形の中心（外接円の中心）は正二十面体の外接球と内接球の中心と一致する。次は展開図で，太線を引いた10個の線分が同一平面上で輪を作ることがわかる。



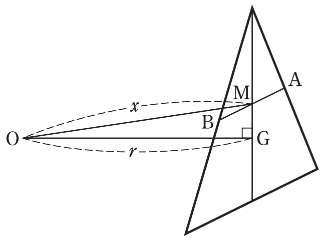


上図は正十角形の一部を表す。中心Oと辺ABまでの距離OMをxとすると，△OMAは∠AOM＝18°，∠OMA＝90°の直角三角形。正二十面体の各面の正三角形の1辺の長さをaとすると，正十角形の1辺の長さは$\frac{a}{2}$だから，$\mathrm{AM}=\frac{a}{4}$

$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OM}}=\tan 18^\circ$ より

$$\mathrm{OM}=\frac{\mathrm{AM}}{\tan 18^\circ}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}$$

ゆえに　$x=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}$



次に内接球の半径rを求める。内接球は各面に接しているが，前述の正十角形に接しているわけではない。接点は正三角形の外心で，これは正三角形なので重心と一致する。上に概略図を示した。ABが

正十角形の1辺を表す。OMが中心と辺までの距離x，Gが三角形の外心（重心）。Mは正三角形の中線の中点になる。Gは中線を頂点側から 2：1 に内分するから

$$MG=\frac{\sqrt{3}}{12}a$$

Gは面と内接球の接点だから，$\angle OGM=90°$

△OGMにピタゴラスの定理を適用して，

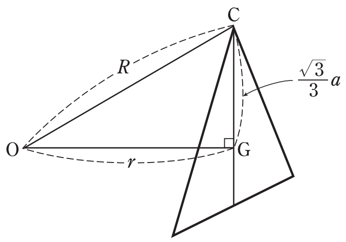
$$\begin{aligned}r^2&=x^2-MG^2\\&=\left(\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{12}a\right)^2\\&=\frac{14+2\sqrt{45}}{48}a^2\end{aligned}$$

ゆえに

$$r=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$$

以上から正二十面体の体積Vは

$$\begin{aligned}V&=20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a\\&=\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3=\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3\end{aligned}$$



一方，外接球の半径Rは，中心から各頂点までの距離になるから上図で直角三角形OGCにピタゴラスの定理を適用して，

$$\begin{aligned}R^2&=r^2+CG^2\\&=\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2\\&=\frac{5+\sqrt{5}}{8}a^2\end{aligned}$$

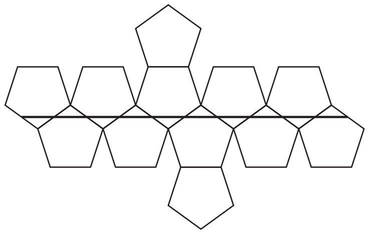
したがって

$$R=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$$

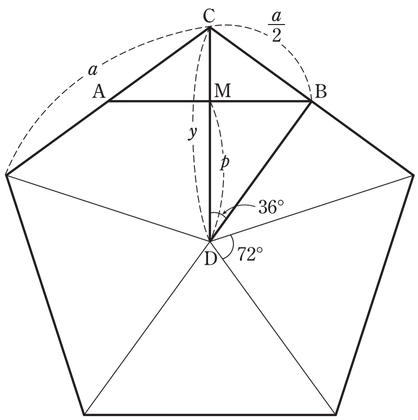
なお，この係数は$\cos 18°$に等しい。

§4. 正十二面体

正十二面体の向かい合う面を上下にして眺めると，ちょうど5弁の花を2つ重ね合わせたように見える。花びらの先端にあたる正五角形の角の部分が互い違いに10枚，輪を描くように見える。下に展開図を示す。



そこで，つながっている10枚の正五角形の角をなす各辺の中点を結んでやると（図の太線），これらの線分は同一平面上にあって正十角形を作る。その外接円の中心は立体の外接球と内接球の中心と一致する。



まず正十角形の1辺の長さを求める。上図は正十二面体の1つの面である正五角形を表す。正十角形の1辺は隣り合う2辺の中点を結んだ線分になるから（図のAB），正五角形の1辺の長さをaとすると，これはちょうど対角線の半分の長さにあたる。

$$\begin{aligned}AB&=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos 36°\\&=\frac{\sqrt{5}+1}{4}a\end{aligned}$$

またABの中点をM，正五角形の外接円の中心をD，半径をyとし，$DM=p$とおくと

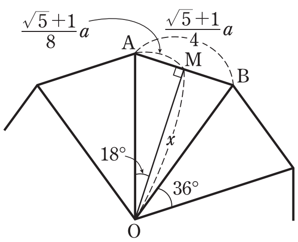
$y\sin 36^\circ=\dfrac{a}{2}$ より

$$y=\frac{a}{2\sin 36^\circ}=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

また

$$p=\mathrm{DB}\cos 36^\circ=y\cos^2 36^\circ$$
$$=\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$
$$=\frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}a$$

次に正十角形について計量する。



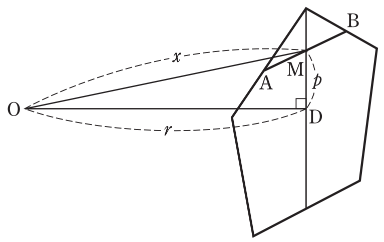
図は正十角形の一部を表したもの。中心Oと辺ABまでの距離OMを x とすると，△OMAは∠AOM＝18°，∠OMA＝90° の直角三角形になるから

$$\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{8}a$$

$\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OM}}=\tan 18^\circ$ より

$$\mathrm{OM}=\frac{\mathrm{AM}}{\tan 18^\circ}=\frac{\sqrt{5}+1}{8}\cdot\frac{5}{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}a$$

次に内接球の半径 r を求める。内接球は各面に接しているが，正二十面体同様，前述の正十角形に接しているわけではない。接点は正五角形の外心（Dで示した）で，下に概略図を示す。



A，Bが各辺の中点，ABが正十角形の1辺。OMが正十角形の半径 x，外心Dは内接球の接点なので

$$\angle\mathrm{ODM}=90^\circ$$

△ODMにピタゴラスの定理を適用して，

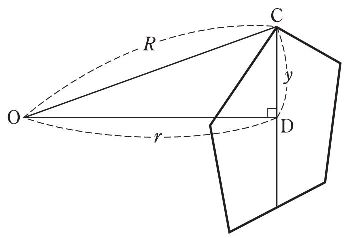
$$r^2=x^2-p^2$$
$$=\left\{\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}a\right\}^2-\left\{\frac{(5+2\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{40}a\right\}^2$$
$$=\frac{25+11\sqrt{5}}{40}a^2$$

ゆえに

$$r=\frac{\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}a=\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$$

正十二面体の体積 V は1辺の長さが a の正五角形を底辺とし，高さが r の正五角錐12個の体積だから，

$$V=12\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{2}y^2\cdot\sin 72^\circ\cdot r$$
$$=12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right)^2\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{10}\sqrt{47+21\sqrt{5}}}{4}a^3$$
$$=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$$



外接球の半径 R は中心から各頂点までの距離だから，内接球の半径がわかるとすぐに求められる。

上図で直角三角形ODCにピタゴラスの定理を適用して，

$$R^2=r^2+\mathrm{CD}^2$$
$$=r^2+y^2$$
$$=\frac{25+11\sqrt{5}}{40}a^2+\left\{\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right\}^2$$
$$=\frac{18+2\sqrt{45}}{16}a^2$$

ゆえに

$$R=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$$

§5. 真球率

球と同相な立体において，立体の内部に含まれる最大の球の半径を r，立体を含む最小の球の半径を Rとするとき，$\dfrac{r}{R}$ をその立体の真球率と呼ぶことにする。このとき正多面体の r と R はそれぞれの内接球，外接球の半径になるから，正多面体の真球率は下表のようになる。(併せて体積も付記した。)

正 n 面体	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=12$	$n=20$
r	$\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$	$\dfrac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$	$\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$
R	$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$	$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}a$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$
体積	$\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$	a^3	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3$	$\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$
$\dfrac{r}{R}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$	$\dfrac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

この結果から互いに双対な立体である正六面体と正八面体，正十二面体と正二十面体の真球率が同じ値であることが分かる。

またこのことから次のような予想をしたい。

m を 4 から 20 までの自然数とし，$n=4, 6, 8, 12, 20$ とおく。

「$m \leqq n$ のとき，一般の m 面体の真球率は，正 n 面体の真球率を超えない。」

この系として

「七面体の真球率は，$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を超えない。」

正しいと言えるのだろうか。

《参考文献》

〔1〕 岩波数学辞典 第 3 版　岩波書店

(東京都立三田高等学校)