くじ引きにおける条件付き確率について
～くじ引きは引く順番に関係しない～

大関（おおせき）　浩二（こうじ）

§1. はじめに

普通のくじ引きで当たる確率は，くじを引く順番に関係しないことは，順列の対等性から明らかです。これは，あらかじめ神様がくじを公平に並べて置き，人がそれを左から順に引いたと考えれば納得できます。

くじ引きの平等性は，ポリアの壺の問題（引いたものと同種類のものを新たに加えて戻す）でも成り立ちます。

§2. 普通のくじの場合

それでは，くじ引きの平等性は条件付き確率にも当てはまるのでしょうか。

【例題 1】

当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじの中から，引いたくじはもとに戻さないで，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。次の確率を求めよ。

(1)　Aが当たりであるとき，Bが当たる確率。

(2)　Bが当たりであるとき，Aが当たる確率。

(3)　Bが当たりであるとき，Cが当たる確率。

【解答】

(1)　Aが当たるという事象を A，B が当たるという事象を B とする。Aが当たりであるとき，B は当たりくじ 2 本を含む 9 本のくじの中からくじを引くことになるから　$P_A(B)=\dfrac{2}{9}$

(2)　定義から

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}$$

くじ引きで，当たりを引く確率は引く順番に関係ないから　$P(A)=P(B)$

よって，$P_B(A)=P_A(B)$ が成り立つ。

つまり，条件付き確率においても，くじを引く順番に関係しないのです。

(1)と同じ答えで　$P_B(A)=\dfrac{2}{9}$

$P_B(A)$ は原因の確率と呼ばれ，次の式で求められます。

$$P_B(A)=\frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$

(3)　Cが当たるという事象を C とする。

くじ引きで，当たりを引く確率は引く順番に関係ないから　$P(A\cap B)=P(B\cap C)$ も成り立つ。

$$P_B(C)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P_A(B)=\frac{2}{9}$$

§3. ポリアの壺の問題の場合

普通のくじ引きの場合，くじ引きの平等性は条件付き確率にも適用されるという興味深い結果が得られた。それでは，ポリアの壺の問題のような変則な場合はどうでしょうか。

【例題 2】

白球が 2 個，赤球が 3 個入っている袋がある。この袋の中から球を 1 個取り出して，

・それが白球なら，取り出した白球に新たに 2 個の白球を加えて袋に戻す。

・それが赤球なら，取り出した赤球に新たに 2 個の赤球を加えて袋に戻す。

順次このような試行を繰り返すものとする。

(1)　2 回目に取り出した球が白球であるとき，1 回目に取り出した球が白球である確率を求めよ。

(2)　2 回目に取り出した球と 12 回目に取り出した球がともに白球である確率を求めよ。

【解答】 ポリアの壺の問題とは

a 個の白球と b 個の赤球が入れてある壺がある。これから1個取り出して，取り出した球と同色の球を新たに c 個加えて壺に戻すという試行を続ける。n 回目の試行で白球が出る確率を $P_n(a,\ b)$ とすると

$$P_n(a,\ b)=P_1(a,\ b)=\frac{a}{a+b}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ。

(1) k 回目に白球が出るという事象を A_k とすると，①より

$P(A_k)=P(A_1)$　が成り立つ。

つまり　$P(A_2)=P(A_1)$

$P_{A_2}(A_1)=\dfrac{P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)}{P(A_2)}$ より

$$P_{A_2}(A_1)=P_{A_1}(A_2)=P_1(4,\ 3)=\frac{4}{4+3}=\frac{4}{7}$$

(2) 1回目が白球か赤球かで場合分けする。

［1］ 1回目が白球の場合，2回目が白球である確率は　$P_1(4,\ 3)=\dfrac{4}{7}$

この状態から12回目が白球である確率は

$$P_{10}(6,\ 3)=P_1(6,\ 3)=\frac{6}{9}$$

［2］ 1回目が赤球の場合，2回目が白球である確率は　$P_1(2,\ 5)=\dfrac{2}{7}$

この状態から12回目が白球である確率は

$$P_{10}(4,\ 5)=P_1(4,\ 5)=\frac{4}{9}$$

［1］,［2］は排反であるから

$$P(A_2\cap A_{12})=\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{6}{9}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{35}$$

ちなみに，$P(A_1\cap A_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{35}$ であるから，ポリアの壺の問題においても，くじ引きの平等性は適用されているようです。また，上の場合分けと計算方法は，①を証明（数学的帰納法）するときのそれらと一緒です。証明がまだの人は挑戦してみてください。

《参考文献》

〔1〕 東京出版 大学への数学 2008年5月号

（新潟県立新発田商業高等学校）