階差を活かす未知な天体の g 測定 そのための数学的裏付け

藏川(くらかわ)　忠興(ただおき)

§1. はじめに

拙稿《つづく階差で転がり出たもの》(数研通信 No.79 掲載；以後本稿でこの名称を引用するときは《つづく階差…》と略称する)で扱った主題がある。「$S=\alpha t^n$ に対し $t=a_i$(n, i：自然数，ただし $a_i=i-1$)として得られる数列 $\{S\}$ において階差を n 回とりつづけるとき，階差 n は一定値 $n!\alpha$ の数列になる」 ……①

これを「階差に潜む固有の性質」と，私は捉えている。《つづく階差…》の後半で a_i の数域を整数まで拡張した。それをさらに拡げ証明を試みるのが本稿の主旨となる。その上で表題の「簡便な g(重力の加速度)測定法」を提案できると考えている。そもそも g との思いがけない出会いが《つづく階差…》を書く直接のきっかけだったから，その当初から私には本稿への思いがあった。一体天文学では素人が思いもよらない方法で g を測定するのかもしれない。遠くの天体はおろか，身近な太陽系惑星のそれはどのように測ったのかと今更ながら分からない門外漢である。時折ニュースになるようなはるかな天体へと旅する観測衛星――これには私もロマンを覚えるのであり，その旅を終える際目標の天体の g も測ると見込んでの提案である。

§2. Newton

すべての物体へ作用する重力，つまりリンゴで知られる引力となればこの人。研究を通し一定な作用の発見に至った Newton の考察過程について推量を織り交ぜ，私は以下のようにたどった。

落下距離(S とする)と時間(t とする)との間に関係式というべきものがあると Newton は仮定しただろうし，観察を通じ $S=\alpha t$ でないのはすぐに察しが付こう。そこで，

$$S=\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3 \qquad \cdots\cdots②$$

(α や α_1 などは一定の作用により生じるもの)
②式あたりへ見当をつけ，実験結果に合わなければ調整を試みるなり t の次数を上げるなり考察を拡げればよかろう――Newton はそう進めただろう。そんなこんなの実験を経ることで $S=\alpha t^2$ へたどり着いたのだろうと想像するが，$\alpha=\frac{1}{2}g$ と結論付けるには今少し時間を要したかもしれない。

手の届きそうな α を私も追ってみたい。物体へ作用する力が生み出す「もの」――これを見出すべく，$S=\alpha t^2$ に対し紙上で数値実験をしてみた。各実験とも測定間隔は一定に保ち，時間 t(初期値 0 に設定)に対し S を求める。

［実験 1］(時間単位 秒；距離単位 m)

t	0	1	2	3	4	5	…
S	0	α	4α	9α	16α	25α	…
階差 1		α	3α	5α	7α	9α	…
階差 2			2α	2α	2α	2α	… 一定値

［実験 2］(時間単位 秒；距離単位 m)

t	0	2	4	6	8	10	…
S	0	4α	16α	36α	64α	100α	…
階差 1		4α	12α	20α	28α	36α	…
階差 2			8α	8α	8α	8α	… 一定値

※［実験 1］との比較のため間隔の時間補正をすれば，

$$8\alpha\div(2\text{秒})^2=2\alpha$$

［実験 3］(時間単位 秒；距離単位 m)

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	…
S	0	$\frac{1}{4}\alpha$	α	$\frac{9}{4}\alpha$	4α	$\frac{25}{4}\alpha$	…

階差1　$\frac{1}{4}\alpha$　$\frac{3}{4}\alpha$　$\frac{5}{4}\alpha$　$\frac{7}{4}\alpha$　$\frac{9}{4}\alpha$　…

階差2　　$\frac{1}{2}\alpha$　$\frac{1}{2}\alpha$　$\frac{1}{2}\alpha$　$\frac{1}{2}\alpha$　…　一定値

※［実験1］との比較のため間隔の時間補正をすれば,

$$\frac{1}{2}\alpha \div \left(\frac{1}{2}\text{秒}\right)^2 = 2\alpha$$

私の実験では測定間隔の違いしか見えないが，実験1～3によれば階差2にαを含む一定値が並ぶ。時間補正すればすべて2α。因みにtの次数は2。ガリレオが落下実験に見た正体は物質の違いに無関係な作用だった。違いに関係なく作用する力で生み出される「もの」は同一に違いないと，すでにNewtonは確信していたろう。紙上実験に本稿でなすべきことが見えている。本物の実験がαの決定へ向かわせる，その検証過程こそが物理の立場ならもとより必要である。測定方法にも苦労しただろう。測定間隔の違いもさることながら，種々様々な実験を重ね多々考察が要っただろう。しかし私が確認したかったことは上述の実験にて達している。

$S=\alpha t^2$ に対しわずか3つ，しかも紙上実験(㊟：記載は3つに止めた)しかしない上に，階差2に一定値が並ぶのは偶然ではないかと心配する向きもあろうが《つづく階差…》にて保証(整数域まで拡張)したところであって，階差に潜む性質なのである。

実験結果が意味するのは？そこに見た同一の「もの」は2αだった。αでなく2α。実験を通し飽かず考察を積み重ね $S=\alpha t^2$ へ至ったNewtonは「何者？」と睨みそして気付く。2αこそが「もの」の正体,「加速度だ！」。gと呼ばれ，$2\alpha=g$ より

$S=\frac{1}{2}gt^2$ へ行き着く。推量を楽しみすぎたろうか。

§3. より一般的な議論

「簡便なg測定法」の提案を目論んでいると§1に明記した。それならば測定状況次第で，tの値としては連続数はおろか整数値にこだわれない場面も起こりうる。すでに§2［実験2］,［実験3］がそれに相当するのに,《つづく階差…》で示したのは「任意の連続整数値に対して」の保証だった。

保証範囲を拡げねばならない。ここへ至る考察を踏まえて自然な推量は次の③だった。

「$S=\alpha t^n$ に対し $t=a_i$ ($a_i=a+(i-1)\varepsilon$，ただしn, i：自然数，a：実数，ε：定数かつ正の実数)を代入し得られる数列$\{S\}$において階差をn回とりつづけるとき，階差nは一定値$n!\varepsilon^n\alpha$の数列になる」

……③

③が任意の自然数nに対し正しいことを示そう。ところで①同様，③の結論にa_iそのものは含まれない。証明においてはa_iの挙動にも注目したい。測定のためならa_iの条件を今少し限定できそうだが,「任意(a：実数，ε：定数かつ正の実数)」に対応させる意味は小さくなかろう。証明には《つづく階差…》で得た結果を活かしている。ただし重複は極力避けた。《つづく階差…》の一部ながら抜粋を§4にまとめたものの，踏み込んで読まれるには《つづく階差…》を少なからず参照していただくかもしれない。目を通してくださる方々を煩わせることについては広く容赦のほどをお願いしたい。

《つづく階差…》にて用いた表記に$p_{l,m}$がある。それは $S=\alpha t^n$ に $t=a_i$(n，i：自然数，ただし $a_i=i-1$)を代入し得られる数列$\{S\}$に対し階差lまでとるときその一般項あるいは第m項(m：自然数)を表し，

$$\begin{aligned}p_{l,m}&=\{\sum_{r=0}^{l}(-1)^r {}_l\mathrm{C}_r a^n_{l+1-r+(m-1)}\}\alpha\\&=\{a^n_{l+1+(m-1)}-la^n_{l+(m-1)}\\&\qquad+\frac{l(l-1)}{2!}a^n_{l-1+(m-1)}-\cdots\\&\cdots+(-1)^{**}la^n_{2+(m-1)}+(-1)^{*}a^n_{1+(m-1)}\}\alpha\end{aligned}\quad\cdots\cdots④$$

(㊟：ここでは $(-1)^*=(-1)^l$，$(-1)^{**}=(-1)^{l-1}$ である。しかし以後，$(-1)^*$はlが偶数なら1，奇数なら-1。また$(-1)^{**}$はlが偶数なら-1，奇数なら1を表すものとし用いている。また以降④を用いるのに特に断りなく変数l，nを適宜書き換えている)であった。④で表されるのは本稿§4または《つづく階差…》§2を参照願いたい。

これを本稿でも使いたい。③におけるa_iの条件に対応させるのはもちろんである。証明では階差nに並ぶ数列の一般項$p_{n,m}$を調べることになる。

では本稿における$p_{n,m}$とは，$S=\alpha t^n$ に対し $t=a_i$ ($a_i=a+(i-1)\varepsilon$，ただしn，i：自然数，a：実数，ε：定数かつ正の実数)を代入し得られる数列$\{S\}$において階差nまでとるとき現れる数列の一般項あるいは第m項であって④より，

$$p_{n,m}=\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r a^n_{n+1-r+(m-1)}\}\alpha$$

$$=\{a^n_{n+1+(m-1)}-na^n_{n+(m-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}a^n_{n-1+(m-1)}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{**}na^n_{2+(m-1)}+(-1)^{*}a^n_{1+(m-1)}\}\alpha \quad \cdots\cdots ⑤$$

これがmに関係なく任意の自然数nに対し$n!\varepsilon^n\alpha$だと示すことになる。ここでa_iを③の条件($a_i=a+(i-1)\varepsilon$, ただし　n, i：自然数, a：実数, ε：定数かつ正の実数)により書き換える。

$$=\{(a+(n+(m-1))\varepsilon)^n-n(a+((n-1)+(m-1))\varepsilon)^n+\frac{n(n-1)}{2!}(a+((n-2)+(m-1))\varepsilon)^n-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{**}n(a+(1+(m-1))\varepsilon)^n+(-1)^{*}(a+(0+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha$$

これについて各(　)を展開したものごとに{　}でくくり直す。

$$=\{a^n+na^{n-1}((n+(m-1))\varepsilon)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}((n+(m-1))\varepsilon)^2+\cdots$$
$$+na((n+(m-1))\varepsilon)^{n-1}+((n+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha$$
$$-n\{a^n+na^{n-1}(((n-1)+(m-1))\varepsilon)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(((n-1)+(m-1))\varepsilon)^2+\cdots$$
$$+na(((n-1)+(m-1))\varepsilon)^{n-1}+(((n-1)+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha$$
$$+\frac{n(n-1)}{2!}\{a^n+na^{n-1}(((n-2)+(m-1))\varepsilon)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(((n-2)+(m-1))\varepsilon)^2+\cdots$$
$$+na(((n-2)+(m-1))\varepsilon)^{n-1}+(((n-2)+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha-\cdots$$
$$\cdots\cdots+(-1)^{**}n\{a^n+na^{n-1}((1+(m-1))\varepsilon)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}((1+(m-1))\varepsilon)^2+\cdots$$
$$+na((1+(m-1))\varepsilon)^{n-1}+((1+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha$$
$$+(-1)^{*}\{a^n+na^{n-1}((0+(m-1))\varepsilon)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}((0+(m-1))\varepsilon)^2+\cdots$$
$$+na((0+(m-1))\varepsilon)^{n-1}+((0+(m-1))\varepsilon)^n\}\alpha$$

ここでa_i各項の組み合わせを変え，係数にも注意して以下のように{　}でくくり直し，

$$=\Big\{a^n-na^n+\frac{n(n-1)}{2!}a^n-\cdots+(-1)^{**}na^n+(-1)^{*}a^n\Big\}\alpha$$
$$+\{(n+(m-1))-n((n-1)+(m-1))+\frac{n(n-1)}{2!}((n-2)+(m-1))-\cdots$$
$$+(-1)^{**}n(1+(m-1))+(-1)^{*}(0+(m-1))\}na^{n-1}\varepsilon\alpha$$
$$+\{(n+(m-1))^2-n((n-1)+(m-1))^2+\frac{n(n-1)}{2!}((n-2)+(m-1))^2-\cdots$$
$$+(-1)^{**}n(1+(m-1))^2+(-1)^{*}(0+(m-1))^2\}\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\varepsilon^2\alpha$$
$$+\cdots$$
$$+\{(n+(m-1))^{n-1}-n((n-1)+(m-1))^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}((n-2)+(m-1))^{n-1}-\cdots$$
$$+(-1)^{**}n(1+(m-1))^{n-1}+(-1)^{*}(0+(m-1))^{n-1}\}na\varepsilon^{n-1}\alpha$$
$$+\{(n+(m-1))^n-n((n-1)+(m-1))^n+\frac{n(n-1)}{2!}((n-2)+(m-1))^n-\cdots$$
$$+(-1)^{**}n(1+(m-1))^n+(-1)^{*}(0+(m-1))^n\}\varepsilon^n\alpha \quad \cdots\cdots ⑥$$

とまとめることで{　}内における多項式の係数がすべて同じになり《変則パスカルの三角形》(㊟：《つづく階差…》で用いたもので，本稿§4を参照願いたい)において階差nの並びに一致させられる。本稿でもこの特性を活かし各{　}の値を求めることになる。

⑥への変形において，1番目の{　}を除けば(これについては別途後述)いずれの{　}もくくり出せる共通因数すべてを外へ出している。これにより実数値だったaとεの影響が{　}内から消えてしまい，2番目以降の{　}内にそれぞれ$n+1$個ずつある(　), (　)^2, …, (　)^{n}にはもはや番号iによる連続する$n+1$個の0または自然数($0+(m-1)\leqq(i-1)+(m-1)\leqq n+(m-1)$) しか残っていない。結局これら$n+1$個の値は大小順も含め$m$に関係なく①$a_i$の条件に合致し，2番目以降$n+1$番目までの{　}の値についてはそっくり①の結果を適用できる。

2番目以降$n+1$番目までの{　}の値について。

①によれば $S=\alpha t^k$ (k：自然数, $1\leqq k\leqq n$) に対する $p_{k,m}$ とは，$S=\alpha t^k$ に $t=a_i$ (i：自然数，$a_i=i-1$) を代入し得られる数列 $\{S\}$ において階差 k までとるときの一般項あるいは第 m 項で $p_{k,m}=k!\alpha$ (m に無関係な定数列) である。ところでいずれの｛ ｝についても係数は《変則パスカルの三角形》において階差 n の並びに一致していたのだった。つまり 2 番目以降の｛ ｝内の多項式は順次 $S=\alpha t^k$ (k：自然数，$1\leqq k\leqq n$) に対する $p_{n,m}$ (㊟：係数が階差 n の並びに一致するなら，すでに階差 n までとっていて $p_{k,m}$ ではない) に相当している。次節§4末尾記載の通り「値は t の次数に依存する」のであり，同じ $p_{n,m}$ でも t の次数により値は異なって，

$1\leqq k\leqq n-1$ のとき，$p_{n,m}=0$

$k=n$ のとき，　　$p_{n,m}=n!\alpha$

(㊟：混乱を招くのであれば恐縮ながら，①に対する証明の流れをそっくり借用するため《つづく階差…》での扱いに倣いくくり出した共通因数のうち α のみ含み $p_{n,m}$ の値とした。正しくは｛ ｝の値 $=0$ または $n!$) である。後者は①より明らか。

$1\leqq k\leqq n-1$ については $S=\alpha t^k$ に対する $\{S\}$ において階差 k を超え階差 n までとるとき，階差 k につづく階差 $(k+1)$ がすでに

$p_{k+1,m}=p_{k,m+1}-p_{k,m}=k!\alpha-k!\alpha=0$ (m に無関係) となる。

最後は「別途後述」とした 1 番目の｛ ｝について，

$$\left\{a^n-na^n+\frac{n(n-1)}{2!}a^n-\cdots +(-1)^{**}na^n+(-1)^{*}a^n\right\}\alpha$$

$$=\left\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r a^n\right\}\alpha$$

$=\{0\}\alpha$ （∵《つづく階差…》§2⑬より）

$=0$

結局のところ m に関係なく⑥において $n+1$ 個あった｛ ｝の値のうち最後のそれが消えずに残る。改めて⑥すなわち⑤の値を正しく示せば，

$$p_{n,m}=\{0\}\alpha+\{0\}na^{n-1}\varepsilon\alpha +\{0\}\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}\varepsilon^2\alpha+\cdots +\{0\}na\varepsilon^{n-1}\alpha+\{n!\}\varepsilon^n\alpha$$

$$=n!\varepsilon^n\alpha \qquad \cdots\cdots⑦$$

以上によって③は任意の自然数 n に対し正しい。a_i を「任意 (a：実数，ε：定数かつ正の実数)」の値として扱い，測定のための保証 (§2 実験 1 ～ 3 に倣えば $a=0$) をすっぽり包含する形で吟味し終えた。得た結論⑦は「測定間隔にのみ依存する」と読める。a_i そのものは消え①との差異は ε。仮に③において $\varepsilon=1$ を選ぶなら①の結論に一致。つまり①は③の特殊な一例 ($a=0$ かつ $\varepsilon=1$) にすぎなかった (㊟：整数域なら，$a=$ 整数 かつ $\varepsilon=1$)。結論⑦は「初期値 a (任意の実数) に依存しない」とも読める。もとより①は実数域において成立 (ただし $\varepsilon=1$) していたことになる。

§4.《つづく階差…》からの抜粋

……前述略……

証明に際し必要とした心得がある。それは各階差に見られる特徴で，その様子を表Ⅰで示そう。

［表Ⅰ］

関数 $f(t)=t^n$ に対し，

t	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
$f(a_i)$	$a_1{}^n$	$a_2{}^n$	$a_3{}^n$	$a_4{}^n$	$a_5{}^n$	…
階差 1	$a_2{}^n-a_1{}^n$	$a_3{}^n-a_2{}^n$	$a_4{}^n-a_3{}^n$	$a_5{}^n-a_4{}^n$		…
階差 2	$a_3{}^n-2a_2{}^n+a_1{}^n$	$a_4{}^n-2a_3{}^n+a_2{}^n$	$a_5{}^n-2a_4{}^n+a_3{}^n$			…
階差 3	$a_4{}^n-3a_3{}^n+3a_2{}^n-a_1{}^n$	$a_5{}^n-3a_4{}^n+3a_3{}^n-a_2{}^n$				…
階差 4	$a_5{}^n-4a_4{}^n+6a_3{}^n-4a_2{}^n+a_1{}^n$					…
…	……					

(㊟：$t=0$，1，2，…であるが，t それぞれの値が各階差でどのように現れ動くかを見るため文字列のままにしている)

表Ⅰによれば数列 $\{f(a_i)\}$ の階差をとりつづけるときに現れる特徴が読み取れるが，本稿で必要としたのは 2 つ。1 つは各階差の項に関する規則性で，その初項は階差の番号より 1 大きい添え字 i と同じく 1 多い個数の a_i が，多項式の左端から添え字の大きい順に配置され，第 2 項以降は添え字が順次 1 ずつ増えつつ初項と同個数の a_i が同様に配置される。もう 1 つは階差ごとに各項の係数に現れる数字の並び方に規則性が見られ，同一階差内ではすべての項について同じである。それを抽出し表にすると，

［表Ⅱ］

階差 1 では	1	−1			
階差 2 では	1	−2	1		
階差 3 では	1	−3	3	−1	
階差 4 では	1	−4	6	−4	1
…	………				

［表Ⅱ］は〈パスカルの三角形〉に似るものの，変

則な並びになっている。証明ではこの並びが大切な役割を担う。そのため，表Ⅱを《変則パスカルの三角形》と名付け以後参照する。さらには，$p_{l,m}$：階差 l の数列の一般項あるいは第 m 項（l，m：自然数）の表記も用いる。（㊟：例えば同じ $p_{2,m}$ でも $S=\alpha t^2$ に対しては $p_{2,m}=2!\alpha$，$S=\alpha t$ に対しては $p_{2,m}=0$ となる。これらの値は証明後初めて保証の付くものながら以後本稿において混乱のないよう，値は t の次数に依存することに留意願いたい）

……後述略……

§5. 階差に頼れば

階差に潜む性質を活かす「簡便な g 測定法」への提案準備は整った。準備では一般（次数 n）に扱ったがここは次数２に限定してよかろう。

すでに重力圏内に入り未知な天体へと近づく観測機を想定願いたい。測定するのは観測機から天体地表までの距離 S（m）。それを観測機自身がプログラムに従い測定時刻 a_i ごとに行うものとする。測定方法は電波なり，距離次第でレーザーも使用できると考える。簡単に言いつつ，観測機が加速されつつある状況での測定には諸々工学的に難しいこともあろうと恐縮する。

下記数表（㊟：$a_i=a+(i-1)\varepsilon$，a：開始時刻，ε：測定間隔（秒）。本表は§2実験１～３と異なる。階差に潜む性質を活かすものであって，t の値で S を算出する表ではない。ひとり測定値 $\{S\}$ を恃み g を得る表である。記録上生（なま）（$a=0$ としない）の測定時刻を添えるが，t 欄の有無は g 測定に影響ない）をご覧願いたい。想定として，表中階差を除き値は観測機からの送信データ。２つの階差は地上管制センターでの計算値（計算することで階差に潜む性質が自動的に機能する）。

t	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
S	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	…
階差１	s_2-s_1	s_3-s_2	s_4-s_3	s_5-s_4	…	
階差２	$s_3-2s_2+s_1$	$s_4-2s_3+s_2$	$s_5-2s_4+s_3$	…		

（㊟：測定値 s_1，s_2，…は天体地表を０m と見做し，地表へ至る手前の距離と捉え負数で表す。見易さからの措置で，階差２に負数が並ぶのを避ける）

測定を始め数表ができ上がるにしたがい，階差２に並ぶ値は§3の議論から一定値でなければならない。そこがNewton空間と仮定するとき，⑦によれば $S=\frac{1}{2}gt^2$ に対し $p_{2,m}=2!\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}g\right)=\varepsilon^2 g$ である。このとき $p_{2,m}\div\varepsilon^2$ が未知な天体の g に他ならない。わずかな記載に止めたものの，これは私の紙上実験結果に違わない結果である。

§6. あとがき

天体の g を求めるのに，$S=\frac{1}{2}gt^2$ に対し S と測定間隔 ε の整数倍の値とを適切に用い計算できる。「引き算」，「掛け算」，「割り算」を行うだろう。しかしそうせずにすむ性質が階差には潜んでいた。本稿の提案によっても階差２回分の「引き算」と一般には ε^2 による「割り算」が階差２に対し必要である。もとよりコンピューター頼みであれば計算方法の違いに大差なかろう。そうではなく観測という性格からすればむしろ本稿に基づくのが自然ではなかろうか。測定を始めたなら，間隔を正確かつ一定に保ち S を測る。それに並行し数列 $\{S\}$ において階差２までとる。精度が影響し理論通り並ぶとは限らないとしても，並ぶ数値を観察すればすむ。やおら時間補正する。素直に階差に頼ってこそ，と考える。

健気に旅する観測機の，すべては性能次第だが仮に階差２に並んでゆく数値が一定値に程遠い挙動を示すのであれば $S=\frac{1}{2}gt^2$ の成り立つNewton空間でないかもしれない。そんなことがあったりすればサプライズ以上にロマンである。

最後に。《つづく階差…》をまとめたとき①の結論に a_i が含まれない特徴に心が残り，①は実数域でも成立するだろうとは見込んでいた。結果として無条件ではなかったが，§3の議論で①との関係が明らかになると共に a_i が無理数を含み１個の数値にまとまらない場合への対応もできたと考えている。次数 n に対し a_i の属する数域を拡げる際面倒に見えていた a と ε，その始末に《変則パスカルの三角形》が大いに働いた。私には「またしても…」の思いだったが，数学的な役割はどこまでも興味深いものであり，改めてその振る舞いを楽しませてもらえた。

《参考文献》

〔１〕数研通信 No.79「つづく階差で転がり出たもの」

（元大阪府立高校教諭）