項の順番を入れ替えた級数の和について

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§0. はじめに

一般に，条件収束する級数については，項の順番を入れ替えると級数の和が変わるが，絶対収束する級数については，項の順番をどのように入れ替えても級数の和が変わらない。

この事実について職場の同僚との議論をきっかけにして，§1，2 のような例を考えることができた。これを高校数学の範囲で明らかと思われる次の**[確認]**を基にして報告します。

なお，このレポートでは，数列 a_n が $a_n \leqq a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ を満たすとき，単調増加であると言う。単調減少も同様とする。

[確認]　次の事実を仮定して議論をすすめる。

(1)　いわゆる「はさみうちの原理」

(ア)　$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ $(n \geqq 1)$ かつ $a_n \to A$, $c_n \to A$ ならば $b_n \to A$　ここで A は実数値。

(イ)　$a_n \leqq b_n$ $(n \geqq 1)$ かつ $a_n \to \infty$ ならば $b_n \to \infty$　　（参考文献〔2〕P108）

(2)　S は実数値または∞として，$S_n \to S$ と仮定する。このとき，$F(n) \to \infty$ となる任意の自然数の単調増加列 $F(n)$ に対して，

$S_{F(n)} \to S$ $(n \to \infty)$ が成り立つ。

すなわち，極限をもつ数列の部分列も同じ極限をもつ。したがって，ある部分列が発散するような数列は発散する。

[補題]　**S_n が極限をもつための十分条件**

(1)　S は実数値，d は自然数の定数とする。$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる数列 a_n の和を $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。このとき，もし $S_{dk} \to S$ $(k \to \infty)$ ならば $S_n \to S$ $(n \to \infty)$ である。

(2)　S は実数値または∞とし，$F(k)$ は自然数の単調増加列で，$F(k) \to \infty$ とする。このとき，S_n が単調増加数列であり，$S_{F(k)} \to S$ $(k \to \infty)$ ならば，$S_n \to S$ $(n \to \infty)$

なお，S_n が単調減少の場合も同様。

$\boxed{\text{証明}}$　(1)　$d(k-1) < n \leqq dk$ における $|a_n|$ の最大値を $|a_{G(k)}|$ とおく。仮定から $|a_n| \to 0$ だから，確認(2)により $|a_{G(k)}| \to 0$ $(k \to \infty)$　このとき

$$\begin{aligned} |S_{dk} - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{dk}| \\ &\leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{dk}| \\ &\leqq |a_{d(k-1)+1}| + |a_{d(k-1)+2}| + \cdots + |a_{dk}| \\ &\leqq d|a_{G(k)}| \end{aligned}$$

ここで，三角不等式により，

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leqq |S_{dk} - S_n| + |S_{dk} - S| \\ &\leqq d|a_{G(k)}| + |S_{dk} - S| \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき，$k \to \infty$ となるから

$$\to d \times 0 + 0 = 0$$

故に，$S_n \to S$ $(n \to \infty)$

(2)　$F(k) \to \infty$ より，任意の自然数 n に対して $n \leqq F(k)$ となる最小の自然数 k を選ぶことができる。このとき，$F(k-1) < n \leqq F(k)$ であり，$n \to \infty$ のとき，$F(k) \to \infty$ より $k \to \infty$ $(k-1 \to \infty)$ である。

まず，S が実数値の場合を考える。

S_n は単調増加より

$$|S_{F(k)} - S_n| = S_{F(k)} - S_n \leqq S_{F(k)} - S_{F(k-1)}$$

ここで三角不等式によれば，

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leqq |S_{F(k)} - S_n| + |S_{F(k)} - S| \\ &\leqq (S_{F(k)} - S_{F(k-1)}) + |S_{F(k)} - S| \end{aligned}$$

$n \to \infty$ $(k \to \infty)$ とすると

$\to S - S + |S - S| = 0$

となり，$S_n \to S$ が従う。

次に，S が ∞ の場合を考える。

S_n は単調増加より，$S_{F(k-1)} \leqq S_n$ である。

$n \to \infty$ のとき $k-1 \to \infty$ であり，仮定により $S_{F(k-1)} \to \infty$ より $S_n \to \infty$ となる。

§1. 和が変わる例

[例 1]　素朴な例(条件収束)

(1)　$m=1, 2, 3, \cdots$として$\frac{1}{2^m}$と$-\frac{1}{2^m}$を交互に2^{m-1}個ずつ計2^m個並べる級数Sは収束して，和は $S=0$

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

(2)　次に，級数Sの項を並び替えて，初項を$-\frac{1}{2}$とする。以降は番号順に，正の項を1個とる毎に負の項を2個ずつとるような並べ替えをした級数Tは収束して，和は $T=-\frac{1}{2}\ (\neq S)$

$$T=\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{1群}\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}_{2群}\underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}_{3群}\underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}}_{4群}+\cdots$$

(3)　最後に，級数Sの項を並び替えて，初項を$-\frac{1}{2}$とする。以降は番号順に，負の項を1個とる毎に，正の項$\frac{1}{2^m}$が2^{m-1}個続くように並び替えた級数Uは，発散する。

$$U=\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}_{1群}\underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2群}\underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{3群}\underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots}_{4群\ \frac{1}{16}が8個}$$

証明　(1)　級数Sの一般項a_nは，$a_n\to 0$ かつ $a_{2m-1}+a_{2m}=0$ を満たす。
したがって，部分和S_nについて $S_{2m}=0$
補題(1)により $S_n\to 0$ となり，結論が従う。

(2)　級数Tの一般項をb_nとおくと，$b_n\to 0$
第m群の先頭を$\frac{1}{2^k}$とすると，第m群の和は

$$b_{3m-1}+b_{3m}+b_{3m+1}=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+1}}=0$$

を満たすので，$T_{3m+1}=b_1=-\frac{1}{2}$

$$T_{3m}=T_{3m+1}-b_{3m+1}\to -\frac{1}{2}-0=-\frac{1}{2}$$

ここで補題(1)を使うと結論を得る。

(3)　第m群$(m\geqq 1)$の先頭は$-\frac{1}{4}$以上であり，この群の2番目以降には$\frac{1}{2^m}$が2^{m-1}個並んでいる。したがって，

$$(第\,m\,群の項の和)\geqq -\frac{1}{4}+\frac{1}{2^m}\times 2^{m-1}=\frac{1}{4}$$

となる。第m群の最後の項番号を$p(m)$として

$$U_{p(m)}\geqq -\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}\to\infty\ (m\to\infty)$$

を満たす。U_nの部分列が発散するのでU_nは発散する。(∵確認(2))

[例 2]　積分を利用する例(条件収束)

p, qを自然数とする。交代級数

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$

について，この級数の項を番号順に，正の項をp個とる毎に負の項をq個とるように並べ替えた級数$L=L\ (p,\ q)$は収束し，その和が $\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ となる。(参考文献〔3〕P153 [例])
これについて，順に次の場合を確認する。

(1)　$p=q=1$
(2)　$p=3$, $q=2$
(3)　$p\geqq 1$, $q\geqq 1$

証明　(1)　LとSは同じ級数であり，参考文献〔1〕P367 演習例題236によれば，Sの部分和S_nについて，$S_n\to\log 2$

(2)　自然数p, qを固定する。このとき，

$$R_{p,q,n}=\frac{1}{pn+1}+\frac{1}{pn+2}+\frac{1}{pn+3}+\cdots+\frac{1}{(p+q)n}$$

$(n\geqq 1)$ と置くと，区分求積法により，

$$R_{p,q,n}=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{p+\frac{1}{n}}+\frac{1}{p+\frac{2}{n}}+\frac{1}{p+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{p+\frac{qn}{n}}\right\}$$
$$\to\int_0^q\frac{1}{p+x}dx\ (n\to\infty)$$
$$=\log(p+q)-\log p$$

に注意する。(特に，$p=q=1$ のときが，参考文献〔2〕P243 例題13である。)ここで，

$$T_m=\frac{1}{4m+2}+\frac{1}{4m+4}+\frac{1}{4m+6}+\cdots+\frac{1}{10m}$$
$$U_m=\frac{1}{6m+1}+\frac{1}{6m+3}+\frac{1}{6m+5}+\cdots+\frac{1}{10m-1}$$

とおく。$L=L(3,\ 2)$ の部分和L_nは

$$L_{5m}=\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}_{3\text{個}}\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{2\text{個}}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}}_{3\text{個}}\underbrace{-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{2\text{個}}$$

$$+\cdots+\underbrace{\frac{1}{6m-5}+\frac{1}{6m-3}+\frac{1}{6m-1}}_{3\text{個}}\underbrace{-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}}_{2\text{個}}$$

$$=S_{10m}+T_m-U_m$$

を満たす。$m\to\infty$ のとき，$S_{10m}\to\log 2$,

$$T_m=\frac{1}{2}R_{2,\ 3,\ m}\to\frac{1}{2}(\log 5-\log 2),$$

$$\frac{1}{2}R_{3,\ 2,\ m}<U_m<\frac{1}{6m}+\frac{1}{2}R_{3,\ 2,\ m}$$

かつ $R_{3,\ 2,\ m}\to\log 5-\log 3$ より，はさみうちの原理を用いて $U_m\to\frac{1}{2}(\log 5-\log 3)$ となるから,

$$L_{5m}\to\log 2+\frac{1}{2}(\log 5-\log 2)-\frac{1}{2}(\log 5-\log 3)$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

L の一般項は 0 に収束するから，$n\to\infty$ のときに L_n も同じ値に収束する。(∵補題(1))

(3) 同様に，次の議論による。

$$T_m=\frac{1}{2qm+2}+\frac{1}{2qm+4}+\cdots+\frac{1}{2(p+q)m}$$

$$U_m=\frac{1}{2qm+1}+\frac{1}{2qm+3}+\cdots+\frac{1}{2(p+q)m-1}$$

とおくと

$$L_{(p+q)m}=S_{2(p+q)m}+T_m-U_m$$

を満たす。$m\to\infty$ のとき，$S_{2(p+q)m}\to\log 2$,

$$T_m=\frac{1}{2}R_{q,\ p,\ m}\to\frac{1}{2}\{\log(p+q)-\log q\},$$

$$\frac{1}{2}R_{p,\ q,\ m}<U_m<\frac{1}{2pm}+\frac{1}{2}R_{p,\ q,\ m}$$

より，$U_m\to\frac{1}{2}\{\log(p+q)-\log p\}$ となるから

$$L_{(p+q)m}\to\log 2+\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log q\quad(m\to\infty)$$

以下は(2)と同様。

§2. 和が変わらない例

［例 3］ 等比級数（絶対収束）

次の(1)，(2)の級数は収束する。さらに，この級数の項をどのように並べ替えた級数も収束して，和は変わらない。

(1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$

証明 (1) この級数は公比 $\frac{1}{4}$ の等比級数ゆえ収束する。後半は，次の命題 2(1)による。

(2) 与えられた級数を S とし，S の正の項，負の項だけを順番に並べた級数を U，V とする。

$$U=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots$$

$$V=-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{32}-\cdots-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\cdots$$

これらは，順に公比 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$ の等比級数ゆえ収束し，その和は $S=\frac{2}{3}$，$U=\frac{4}{3}$，$V=-\frac{2}{3}$ である。後半は，次の命題 2(2)による。

［命題 2］

(1) 各項が $a_n\geqq 0$ となる級数

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

が収束し，和が S であると仮定する。

このとき，S の項を任意に並べ替えた級数を

$$T=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots$$

とすると，級数 T も収束して和は S となる。

なお，各項が $a_n\leqq 0$ の場合も同様。

(2) 数列 $\{a_n\}$ において，

$a_{2m-1}>0$，$a_{2m}<0$ と仮定し，級数

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

の正の項，負の項だけを順番に並べた級数

$$U=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}+\cdots$$

$$V=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m}+\cdots$$

が共に収束し，その和をそれぞれ U，V とする。

このとき級数 S も収束し，その和を S とすると $S=U+V$ を満たす。

さらに，級数 S を任意に並べ替えた級数を

$$T=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots$$

とすると，T も収束して和は S に等しい。

証明 級数 S，T の部分和を(1)，(2)ともに

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

とし，$A_n=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，$B_n=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$ とおく。

並び替えをしていることから，

(ア) 各 a_n に対して，$b_k=a_n$ となる項 b_k が 1 つだけ存在する。このとき，$k=f(n)$ と表す。

すなわち，$b_{f(n)}=a_n$

(イ) 逆に，各 b_k に対して，$b_k=a_n$ となる項 a_n が1つだけ存在する。このとき，$n=g(k)$ と表す。
すなわち，$b_k=a_{g(k)}$
ここで，

$$F(n)=\max\{f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n)\}$$

とおくと $n\leqq F(n)\leqq F(n+1)$ であり，
$F(n)\to\infty$ を満たす。……①

$$G(n)=\max\{g(1),\ g(2),\ \cdots,\ g(n)\}$$

とおくと $n\leqq G(n)\leqq G(n+1)$ である。
さらに，$H(n)=G(F(n))$ $(\geqq F(n)\geqq n)$
とおくと，次の包含関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} A_n&=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}=\{b_{f(1)},\ b_{f(2)},\ \cdots,\ b_{f(n)}\}\\ &\subset\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{F(n)}\}=B_{F(n)}\\ &=\{a_{g(1)},\ a_{g(2)},\ \cdots,\ a_{g(F(n))}\}\\ &\subset\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{G(F(n))}\}=A_{G(F(n))}=A_{H(n)} \end{aligned}$$

(1) 級数 S が収束するから $a_n\to 0$
さらに $S_n\leqq S$ である。上の集合の包含関係において，各集合に属する要素の和をとると，

$$S_n\leqq T_{F(n)}\leqq S_{H(n)}\leqq S$$

ここで，$n\to\infty$ のとき $S_n\to S$ より $T_{F(n)}\to S$
T_n は単調増加数列かつ①から，補題(2)により

$$T_n\to S$$

(2) 前半を示す。U，V の部分和を U_n，V_n とすると $U_n\to U$，$V_n\to V$
ここで，$S_{2m}=U_m+V_m\to U+V$ $(m\to\infty)$ かつ，S の一般項は0に収束するから，補題(1)により

$$S_n\to U+V\ (n\to\infty)$$

後半を示す。A_{2m} の中で，
正の項を $A^+{}_m=\{a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2m-1}\}$
負の項を $A^-{}_m=\{a_2,\ a_4,\ \cdots,\ a_{2m}\}$
とする。さらに，$b_k>0$ となる項について番号の小さい順に並べた級数を

$$P=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n+\cdots$$

とし，$b_k<0$ となる項を順に並べた級数を

$$Q=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n+\cdots$$

として，その部分和を P_n，Q_n とおく。すると，P_n は単調増加，Q_n は単調減少である。級数 P は，各項が正の級数 U を並び替えた級数ゆえ，(1)により $P_n\to U$　　同様に $Q_n\to V$

さて，B_n の中で $b_k>0$ となる項を $p(n)$ 個とし，$C_n=\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{p(n)}\}$ とおく。また，$b_k<0$ となる項を $q(n)$ 個とし，
$D_n=\{d_1,\ d_2,\ d_3,\ \cdots,\ d_{q(n)}\}$ とおく。
すると，$p(n)+q(n)=n$ かつ

$$T_n=P_{p(n)}+Q_{q(n)}\quad\cdots\cdots①$$

である。ここで，$n\to\infty$ とすると

$$p(n)\to\infty,\ q(n)\to\infty\quad\cdots\cdots②$$

となることが次のように確かめられるから，
$T_n=P_{p(n)}+Q_{q(n)}\to U+V=S$ となる。

そこで最後に②を確かめれば証明が完了する。
いま，$n\leqq F(n)$，$A_{2n}\subset B_{F(2n)}$ であり，これらの中で正の項，負の項に分けて考えると，
$A^+{}_n\subset C_{F(2n)}$，$A^-{}_n\subset D_{F(2n)}$ より
$n\leqq p(F(2n))$，$n\leqq q(F(2n))$ となる。
前者より，単調増加数列 $p(n)$ の部分列が
$p(F(2n))\to\infty$ となるから，補題(2)により
$p(n)\to\infty$ である。$q(n)\to\infty$ も同様。

《参考文献》

〔1〕 チャート式 基礎からの数学Ⅲ　数研出版　P175，P367
〔2〕 高等学校数学科用 数学Ⅲ（教科書）　数研出版　P108，P243
〔3〕 高木貞治著 解析概論（改訂第三版）　岩波書店　P143〜153

（広島県　広島市立基町高等学校）