バランス方程式と特性方程式

河村（かわむら）　嘉生（よしお）

§1. はじめに

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+4$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+4$ を満たす数列の一般項は

$a_{n+1}=3a_n+4$ を変形して　　$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

$a_n+2=3^{n-1}(a_1+2)$，$a_n=3^{n-1}(a_1+2)-2$ より

(1)　$a_n=3^{n-1}\times(2+2)-2$　(2)　$a_n=3^{n-1}\times(3+2)-2$

　　$a_n=\underline{4\times3^{n-1}}\,\underline{-2}$　　　　$a_n=\underline{5\times3^{n-1}}\,\underline{-2}$

となり，一般項は，初項の値によって変化する部分「$4\times3^{n-1}$，$5\times3^{n-1}$」と，初項の値によって変化しない部分「-2」で構成されている。

　初項の値によって変化しない部分，すなわち，漸化式の形によって定まる部分を「特殊解」，変化する部分を「特性解によって定まる部分」という。

　この特性解を求める方程式には**特性方程式**という名称があるが，特殊解を求める方程式には，高校生に説明する決まった名前がない。目的の異なる 2 種類の方程式に同じ名前を付けることは避け，**特性方程式**以外であれば「ヨシオの方程式」でも，アイドルグループの名前からとって「Rev.equation」でもよいのだが，「数列と漸化式」，「和分差分」の分野ではおそらく重複しないので，このレポートでは，**バランス方程式**という名前を付けて説明することにする。途中，説明や計算過程を省いた箇所があり，読みにくい点も多々あるかと思いますが，ページ数の制限によるものなので，ご容赦下さい。

§2. 簡単な隣接 2 項間の漸化式

$a_1=a$，$a_{n+1}=r\times a_n+d$ $(r\neq1)$ を **簡単な（隣接 2 項間の）漸化式** ということにする。

この簡単な漸化式 $a_{n+1}=r\times a_n+d$ $(r\neq1)$ について，$a_1=k$ とすると $a_1=a_2=a_3=\cdots$ が成立する k が存在する。この値を「**平衡点**」または「**特殊解**」という。また，この値を求める方程式を「**バランス方程式**」ということにする。

$a_{n+1}=r\times a_n+d$ の**バランス方程式**は，

$a_n\Rightarrow k$ とすると $a_{n+1}\Rightarrow k$ となり，これを代入して $k=r\times k+d$ である。

この方程式の解 k について

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =r\times a_n+d \\ -) & k & =r\times k+d \\ \hline & a_{n+1}-k & =r\times(a_n-k) \end{array}$$

と変形すると

$$a_n-k=r^{n-1}\times(a_1-k)$$

$a_n=(a_1-k)\times r^{n-1}+k$ を得る。

§3. いろいろな漸化式のバランス方程式

次の隣接 2 項間の漸化式を解け

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+5$

バランス方程式の立式

$a_n \Rightarrow k$ とすると，$a_{n+1} \Rightarrow k$

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 2a_n+5 \\ -) & k & = & 2k+5 \\ \hline & a_{n+1}-k & = & 2(a_n-k) \end{array}$$

…**バランス方程式**（$k=2k+5$）

$k=2k+5$ を解くと　　$k=-5$

$a_n+5=2^{n-1}(a_1+5)$　　　$a_n=3\times2^n-5$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+5$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow k\times n$ とすると，$a_{n+1}\Rightarrow k\times(n+1)$

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & a_n+5 \\ -) & k\times(n+1) & = & k\times n+5 \\ \hline & a_{n+1}-k(n+1) & = & a_n-kn \end{array}$$

…**バランス方程式**（$k\times(n+1)=k\times n+5$）

$k(n+1)=kn+5$ を解くと　　$k=5$

$a_{n+1}-5(n+1)=a_n-5n$

$a_n-5n=a_1-5\times1$　　　$a_n=5n-3$

(3)　$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n+4n+5$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow kn+h$ とすると，$a_{n+1}\Rightarrow k(n+1)+h$

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & 2a_n+4n+5 \\ -) & k(n+1)+h & = & 2(kn+h)+4n+5 \\ \hline & a_{n+1}-\{k(n+1)+h\} & = & 2\{a_n-(kn+h)\} \end{array}$$

バランス方程式（$k(n+1)+h=2(kn+h)+4n+5$）

$k(n+1)+h=2(kn+h)+4n+5$ を解くと

$-kn+(k-h)=4n+5,\quad k=-4,\ h=-9$

$a_{n+1}-\{-4(n+1)-9\}=2\{a_n-(-4n-9)\}$

$a_n-(4n-9)=2^{n-1}\{a_1-(-4\times1-9)\}$

$a_n=17\times2^{n-1}-4n-9$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4n+5$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow kn(n-1)+hn$ とすると，

$a_{n+1}\Rightarrow k(n+1)\times n+h(n+1)$

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n+4n+5 \\ -)\ k(n+1)\cdot n+h(n+1) & = & kn(n-1)+hn+4n+5 \quad \text{バランス方程式} \\ \hline a_{n+1}-\{k(n+1)\cdot n+h(n+1)\} & = & a_n-\{kn(n-1)+hn\} \end{array}$$

$k(n+1)\cdot n+h(n+1)=kn(n-1)+hn+4n+5$ を解くと $2kn+h=4n+5,\quad k=2,\ h=5$

$a_{n+1}-\{2(n+1)\cdot n+5(n+1)\}=a_n-\{2n(n-1)+5n\}$

$a_n-\{2n\cdot(n-1)+5n\}=a_1-\{2\times1\times(1-1)+5\times1\}$

$a_n-(2n^2+3n)=1-5$

$a_n=2n^2+3n-4$

(5) $a_1=4,\ a_{n+1}=3a_n+2^n$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow k\times2^n$ とすると，$a_{n+1}\Rightarrow k\times2^{n+1}$

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n+2^n \\ -)\ k\times2^{n+1} & = & 3k\times2^n+2^n \quad \cdots\text{バランス方程式} \\ \hline a_{n+1}-k\times2^{n+1} & = & 3(a_n-k\times2^n) \end{array}$$

$k\times2^{n+1}=3k\times2^n+2^n$ を解くと $k=-1$

$a_{n+1}-(-1)\cdot2^{n+1}=3\{a_n-(-1)\cdot2^n\}$

$a_n+2^n=3^{n-1}(a_1+2^1)$

$a_n+2^n=6\times3^{n-1}$

$a_n=2\times3^n-2^n$

(6) $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n+2^n$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow kn\times2^n$ とすると，$a_{n+1}\Rightarrow k(n+1)\times2^{n+1}$

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 2a_n+2^n \\ -)\ k(n+1)\times2^{n+1} & = & 2kn\times2^n+2^n \quad \cdots\text{バランス方程式} \\ \hline a_{n+1}-k(n+1)\times2^{n+1} & = & 2\{a_n-kn\times2^n\} \end{array}$$

$k(n+1)\times2^{n+1}=2kn\times2^n+2^n$ を解くと $k=\dfrac{1}{2}$

$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}(n+1)\times2^{n+1}=2\left(a_n-\dfrac{1}{2}n\times2^n\right)$

$a_n-\dfrac{1}{2}n\times2^n=2^{n-1}\left(a_1-\dfrac{1}{2}\times1\times2^1\right)$

$a_n-\dfrac{1}{2}n\times2^n=2^{n-1}$

$a_n=2^{n-1}\times(n+1)$

§4. 隣接 3 項間の漸化式

> 隣接 3 項間の漸化式
>
> $a_{n+2}+aa_{n+1}+ba_n=0$ について，
>
> **特性方程式** $t^2+at+b=0$ が異なる 2 つの解 α, β をもつとき
>
> $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$
>
> $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ と変形でき，
>
> $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}\times(a_2-\alpha a_1)$
>
> $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}\times(a_2-\beta a_1)$ が成立し
>
> $a_n=\dfrac{\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}$ である。

§5. 特性方程式とバランス方程式

次の隣接 3 項間の漸化式を解け

(1) $a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow k$ とすると，$a_{n+1}\Rightarrow k$，$a_{n+2}\Rightarrow k$

$$\begin{array}{rcl} a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n & = & 2 \\ -)\ k-5k+6k & = & 2 \quad \text{バランス方程式} \\ \hline (a_{n+2}-k)-5(a_{n+1}-k)+6(a_n-k) & = & 0 \end{array}$$

バランス方程式を解いて $k=1$

特性方程式 $t^2-5t+6=0$ を解いて

$t=2,\ 3$ を得るので

$(a_{n+2}-1)-5(a_{n+1}-1)+6(a_n-1)=0$ は

$(a_{n+2}-1)-2(a_{n+1}-1)=3\{(a_{n+1}-1)-2(a_n-1)\}$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+1=3(a_{n+1}-2a_n+1)\quad\cdots①$

$(a_{n+2}-1)-3(a_{n+1}-1)=2\{(a_{n+1}-1)-3(a_n-1)\}$

$a_{n+2}-3a_{n+1}+2=2(a_{n+1}-3a_n+2)\quad\cdots②$

と変形できる。

①より $a_{n+1}-2a_n+1=3^{n-1}(a_2-2a_1+1)$

$a_{n+1}-2a_n+1=3^{n-1}\times4\quad\cdots③$

②より $a_{n+1}-3a_n+2=2^{n-1}(a_2-3a_1+2)$

$a_{n+1}-3a_n+2=2^{n-1}\times4\quad\cdots④$ なので

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1}-2a_n+1 & = & 4\times3^{n-1}\quad\cdots③ \\ -)\ a_{n+1}-3a_n+2 & = & 4\times2^{n-1}\quad\cdots④ \\ \hline a_n-1 & = & 4\times3^{n-1}-2^{n+1} \\ a_n & = & 4\times3^{n-1}-2^{n+1}+1 \end{array}$$

(2) $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=1$

バランス方程式の立式

$a_n\Rightarrow kn$ とすると，

$a_{n+1}\Rightarrow k(n+1)$，$a_{n+2}\Rightarrow k(n+2)$

$$\begin{array}{lrcrcrl} & a_{n+2} & - & 3a_{n+1} & + & 2a_n & =1 \\ & k(n+2) & - & 3k(n+1) & + & 2kn & =1 \\ -) & & & \text{バランス方程式} & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\{a_{n+2}-k(n+2)\}-3\{a_{n+1}-k(n+1)\}+2(a_n-kn)=0$$

バランス方程式　$k(n+2)-3k(n+1)+2kn=1$ を解くと　$k=-1$

特性方程式　$t^2-3t+2=0$ を解いて

$t=1,\ 2$ を得るので

$(a_{n+2}+n+2)-3(a_{n+1}+n+1)+2(a_n+n)=0$ は

$$(a_{n+2}+n+2)-1\times(a_{n+1}+n+1)$$
$$=2\{(a_{n+1}+n+1)-1\times(a_n+n)\}$$

$(a_{n+2}-a_{n+1}+1)=2(a_{n+1}-a_n+1)$　…①

$$(a_{n+2}+n+2)-2(a_{n+1}+n+1)$$
$$=1\times\{(a_{n+1}+n+1)-2(a_n+n)\}$$

$a_{n+2}-2a_{n+1}-n=a_{n+1}-2a_n-(n-1)$　…②

と変形できる。

①より　$(a_{n+1}-a_n+1)=2^{n-1}(a_2-a_1+1)$

$a_{n+1}-a_n+1=2^{n-1}\times 3$

$a_{n+1}-a_n=3\times 2^{n-1}-1$　…③

②より　$a_{n+1}-2a_n-(n-1)=a_2-2a_1-(1-1)$

$a_{n+1}-2a_n-(n-1)=a_2-2a_1$

$a_{n+1}-2a_n-n+1=1$

$a_{n+1}-2a_n=n$　…④ なので

$$\begin{array}{lrl} & a_{n+1}-a_n= & 3\times 2^{n-1}-1 \quad \cdots③ \\ -) & a_{n+1}-2a_n= & n \quad \cdots④ \\ \hline & a_n = & 3\times 2^{n-1}-n-1 \end{array}$$

§6. 漸化式の一般項と行列の *n* 乗

分数形の漸化式と行列

分数形の漸化式　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ に対して

行列 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を考える。

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を満たす 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$（$y_n\neq 0$, $n=1, 2, 3, \cdots$）について

$$\frac{x_n}{y_n}=a_n \Longrightarrow \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=a_{n+1}\quad \text{が成立する。}$$

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ を満たす 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $\{y_n\neq 0$, $n=1, 2, 3, \cdots$）について

$$\frac{x_1}{y_1}=a_1 \Longrightarrow \frac{x_n}{y_n}=a_n\quad \text{が成立する。}$$

$A=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ について，行列 A の固有方程式

$t^2-(p+s)t+ps-qr=0$ が

$t=\lambda_1,\ \lambda_2$ を（重解も含めて）解にもつとき

河村の方法

i）$\lambda_1\neq\lambda_2$, $\begin{pmatrix} p-\lambda_2 \\ r \end{pmatrix}\neq\vec{0}$, $\begin{pmatrix} q \\ s-\lambda_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ のとき

$P=\begin{pmatrix} p-\lambda_2 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ が成立し

$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$

$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^n \end{pmatrix}P^{-1}$ となる。

ii）$\lambda_1=\lambda_2$, $\begin{pmatrix} p-\lambda_1 \\ r \end{pmatrix}\neq\vec{0}$, $\begin{pmatrix} q+1 \\ s-\lambda_1 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$ のとき

$P=\begin{pmatrix} p-\lambda_1 & q+1 \\ r & s-\lambda_1 \end{pmatrix}$ とすると

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ が成立し

$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & n\times\lambda_1{}^{n-1} \\ 0 & \lambda_1{}^n \end{pmatrix}P^{-1}$ となる。

次の分数形の漸化式を解け

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{a_n-16}{a_n-7}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ とすると，固有方程式

$t^2+6t+9=0$ は $t=-3$ を重解にもつ。

河村の方法 ii）を利用して

$P=\begin{pmatrix} 1-(-3) & -16+1 \\ 1 & -7-(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成立し

$$\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & n\cdot(-3)^{n-1} \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -15 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

となる。

$a_1=\dfrac{x_1}{y_1}=3$ なので，$x_1=3$, $y_1=1$ とすると

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-15\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^{n-1}&(n-1)\cdot(-3)^{n-2}\\0&(-3)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-15\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-15\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^{n-1}&(n-1)\cdot(-3)^{n-2}\\0&(-3)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&-15\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-3)^{n}-(n-1)\cdot(-3)^{n-2}\\-(-3)^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot(-3)^{n}-4(n-1)\cdot(-3)^{n-2}+15\cdot(-3)^{n-1}\\(-3)^{n}-(n-1)\cdot(-3)^{n-2}+4\cdot(-3)^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-3)^{n-2}\cdot(-4n-5)\\(-3)^{n-2}\cdot(-n-2)\end{pmatrix}$$

$x_n=-(-3)^{n-2}\cdot(4n+5)$，$y_n=-(-3)^{n-2}\cdot(n+2)$

$a_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ より　$a_n=\dfrac{4n+5}{n+2}$

§7. バランス方程式の解と行列の関係

> 漸化式　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の
>
> **バランス方程式**　$k=\dfrac{pk+q}{rk+s}$ の解 α について
>
> $\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ が成立する。

次の分数形の漸化式を行列を用いて解け

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n-16}{a_n-7}$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n-16}{a_n-7}$ の**バランス方程式**は　$k=\dfrac{k-16}{k-7}$

これを解いて　$k=4$（重解）を得る。

$a_1=\dfrac{x_1}{y_1}=3$ なので，$x_1=3$，$y_1=1$ とすると

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

ここで　$\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=(-3)^{n}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

固有ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ に対して

$(A-\lambda E)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ を解くと

$$\left\{\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}-(-3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t+1\\t\end{pmatrix}$（$t$ は任意）

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(-3)^{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+n\cdot(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ を利用して

$$\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\left\{\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-16\\1&-7\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$-\left\{(-3)^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(n-1)\cdot(-3)^{n-2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=(-3)^{n-2}\begin{pmatrix}-4n-5\\-n-2\end{pmatrix}$$

$x_n=-(-3)^{n-2}(4n+5)$，$y_n=-(-3)^{n-2}(n+2)$

$a_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ より　$a_n=\dfrac{4n+5}{n+2}$

§8. まとめ

「**バランス方程式**」を「**特性方程式**」と紹介して指導している場面を目にすることがある。はじめに書いたように，名前がないのならば敢えて名前を付けないか，限定的に「ここでは○○と言う（他ではどう表現しているか知らない）」と表現すればよい。新学習指導要領の言う「言語活動の充実」を意識するあまり，何についても名前を付けようとするのは，かえって生徒の言語活動を阻害する結果になってしまうのではないだろうか。

「**バランス方程式**」と「**特性方程式**」が同時に存在する漸化式を紹介することによって，２つの方程式の違いを明らかにすることができたのではないかと思っている。

（岐阜県立岐山高等学校）