

円周角の定理とその逆の解析的証明

～十分知っている事実であるがその解析的証明は？～

にしもと のりよし
西元 教善

Part I 円周角の定理の解析的証明

§1. はじめに

中学校で学習し、高校でもよく使う定理の1つに「円周角の定理」がある。中学校のときにも証明はしているであろうが、これを高校レベルで証明するどのような証明になるであろうか。

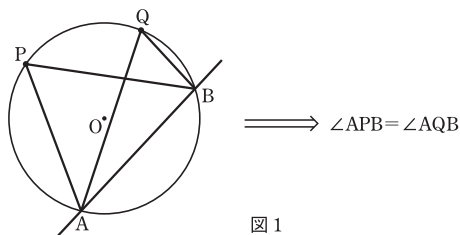
Part I では、「円周角の定理」についての解析的な証明…というといささか大げさであるが、座標軸を設定して、円の方程式やベクトル(の内積)を利用して証明してみたい。

§2. 円周角の定理の証明

～単位円、ベクトルの内積の利用～

周知の通り、円周角の定理とは、「円O上に異なる2点A, Bをとり、この円上に直線ABに関して同じ側に2点P, Qをとると、 $\angle APB = \angle AQB$ である。」という数学的事実である。

図に表すと図1のようになる。



xy 平面上で、単位円つまり原点Oを中心とし、半径が1の円 $x^2 + y^2 = 1$ ……① を考える。
①上に、4点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, -y_1)$ ($-1 < x_1 < 1$)、 $C(-1, 0)$, $P(x, y)$ ($-1 < x < x_1$) をとる。(図2)
このとき、Pは直線ABに関してCと同じ側にある。

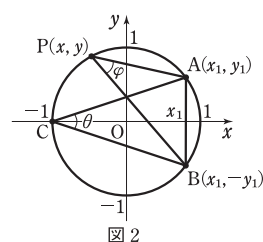
また、ここで、

$$\angle ACB = \theta, \angle APB = \varphi$$

$$(0^\circ < \theta < 180^\circ, 0^\circ < \varphi < 180^\circ)$$

とおくと、

$$\cos \theta = \cos \varphi \text{ を示せば、} \theta = \varphi \text{ となる。}$$



なお、A, Pは円①上にあるので、

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。

さて、 $\overrightarrow{CA} = (x_1 + 1, y_1)$, $\overrightarrow{CB} = (x_1 + 1, -y_1)$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (x_1 + 1)^2 - y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + 1 - y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + (x_1^2 + y_1^2) - y_1^2 \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &= 2x_1(x_1 + 1) \end{aligned}$$

である。

また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}| &= \sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2} \sqrt{(x_1 + 1)^2 + (-y_1)^2} \\ &= (x_1 + 1)^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + 1 + y_1^2 \\ &= 2(x_1 + 1) \quad (\textcircled{2} \text{より}) \end{aligned}$$

であり、 $-1 < x_1 < 1$ より、 $x_1 + 1 \neq 0$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{2x_1(x_1 + 1)}{2(x_1 + 1)} = x_1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

である。

$$\overrightarrow{PA}=(x_1-x, y_1-y), \overrightarrow{PB}=(x_1-x, -y_1-y)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (x_1-x)^2 - (y_1-y)(y_1+y) \\ &= x_1^2 - 2x_1x + x^2 - y_1^2 + y^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x + 1 - (1-x_1^2) \quad (\text{①, ②より}) \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x \\ &= 2x_1(x_1-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-y)^2} \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1+y)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x)^4 + \{(y_1-y)^2 + (y_1+y)^2\}(x_1-x)^2} \\ &\quad + (y_1-y)(y_1+y)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x)^4 + 2(y_1^2 + y^2)(x_1-x)^2 + (y_1^2 - y^2)^2} \quad \dots \text{④} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} (y_1^2 - y^2)^2 &= \{(1-x_1^2) - (1-x^2)\}^2 \\ &= (-x_1^2 + x^2)^2 \\ &= (x_1-x)^2(x_1+x)^2 \quad \dots \text{⑤} \end{aligned}$$

であるから、⑤を④に代入して、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{(x_1-x)^4 + 2(y_1^2 + y^2)(x_1-x)^2 + (x_1-x)^2(x_1+x)^2} \\ &= (x_1-x) \sqrt{(x_1-x)^2 + 2(y_1^2 + y^2) + (x_1+x)^2} \\ &\quad (x < x_1 \text{ より}) \quad \dots \text{⑥} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\quad} \text{の中} \\ &= x_1^2 - 2x_1x + x^2 + 2y_1^2 + 2y^2 + x_1^2 + 2x_1x + x^2 \\ &= 2\{(x_1^2 + y_1^2) + (x^2 + y^2)\} \\ &= 2(1+1) \quad (\text{①, ②より}) \\ &= 4 \quad \dots \text{⑦} \end{aligned}$$

$$\text{⑥に⑦を代入すると、} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| = 2(x_1-x)$$

$x < x_1$ より $x_1-x \neq 0$ であるから、

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{2x_1(x_1-x)}{2(x_1-x)} = x_1 \quad \dots \text{⑧}$$

である。

よって、③、⑧より、 $\cos \theta = \cos \varphi$ である。

$0^\circ < \theta < 180^\circ$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ であるから、 $\theta = \varphi$ である。つまり、円①上の4点

$A(x_1, y_1)$, $B(x_1, -y_1)$ ($-1 < x_1 < 1$), $C(-1, 0)$, $P(x, y)$ ($-1 < x < x_1$)

に対して、 $\angle APB = \angle ACB$ が成り立つ。

なお、この証明において一般性は失われていないので《円O上に異なる2点A, Bをとり、その円周上に直線ABに関して同じ側に2点P, Qをとると、 $\angle APB = \angle AQB$ である。》こと、つまり「円周角の定理」が証明された。(図3)

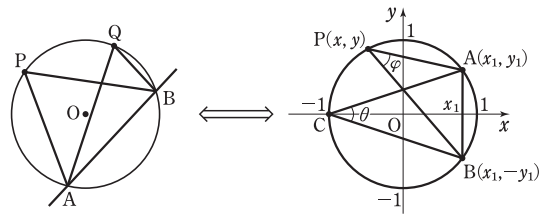


図3

§3. ここまでのまとめ

何を今更「円周角の定理」を改めて証明する必要があるのかと思われる方もいるだろう。実は私自身「円周角の定理」の証明を式の上で納得した覚えがなく、いわゆる「喉元に刺さった小骨」を取る思いで考察したというのが本音である。

副題にも書いておいたが、十分知って使いこなせているが、なぜその数学的事実が成り立つのかを十分に理解していないことがよくある。だからといって、その成立理由(証明)を理解してから使うというのは数学教育的にみても効率がよくない。

教科書にも「一般に……であり(ということが知られている)」という表現がとられていることがあるが、これは生徒の現在の理解力を超えるがその事実を知って使えることに数学教育的意義を認める内容に対してである。

しかし、学年が進むと証明ができるようになる、そのような学習をすることがある。そのような場合には新規の内容ばかりでなく、知っているが成立理由がよくわからない、あるいは曖昧なままであるが学習済みの内容を再度取り上げることも重要である。いわゆる「用具的理解」「関係的理解」「論理的理解」「記述的理解」へと昇華する機会があるからである。

Part II 円周角の定理の逆の解析的証明

～単位円, ベクトルの内積, 余弦定理の利用～

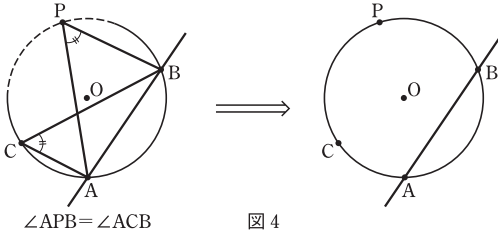
§1. はじめに

Part I で、 xy 平面上の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ とベクトルの内積を利用して、円周角の定理を証明した。**Part II** では、円周角の定理の逆を xy 平面上の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ とベクトルの内積, 余弦定理を利用して解析的に証明する。

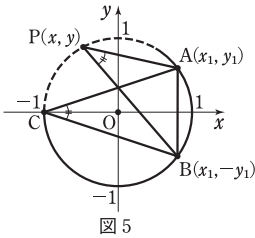
§2. 円周角の定理の逆の証明

～単位円、ベクトルの内積、余弦定理の利用～

周知の通り、円周角の定理の逆とは、《円O上に異なる3点A, B, Cをとり、直線ABに関してCと同じ側に点Pを $\angle APB = \angle ACB$ となるようにとると、Pは円O上にある。》という数学的事実である。図に表すと図4のようになる。



xy 平面上で、原点Oを中心とし、半径が1の円 $x^2 + y^2 = 1$ ……① つまり単位円を考える。
円①上に3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, -y_1)$, $C(-1, 0)$ ($-1 < x_1 < 1$, $y_1 > 0$) をとる。 x_1 は固定する。
このとき、 $x_1^2 + y_1^2 = 1$ ……②
また、 $P(x, y)$ を直線ABに関して同じ側に、 $\angle APB = \angle ACB$ となるようにとる。(図5)



このとき、
 $\vec{CA} = (x_1 + 1, y_1)$, $\vec{CB} = (x_1 + 1, -y_1)$

であるから、

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= (x_1 + 1)^2 - y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + 1 - y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + (x_1^2 + y_1^2) - y_1^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_1 \\ &= 2x_1(x_1 + 1) \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} |\vec{CA}| |\vec{CB}| &= \sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2} \sqrt{(x_1 + 1)^2 + (-y_1)^2} \\ &= (x_1 + 1)^2 + y_1^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 + 1 + y_1^2 \\ &= 2(x_1 + 1) \quad (\text{②より}) \end{aligned}$$

である。 $-1 < x_1 < 1$ より $x_1 + 1 \neq 0$ であるから、

$$\cos \angle ACB = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| |\vec{CB}|} = \frac{2x_1(x_1 + 1)}{2(x_1 + 1)} = x_1$$

$\angle APB = \angle ACB$ であるから、 $\cos \angle APB = x_1$ である。

次に、 $\triangle APB$ に余弦定理を用いると、

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cos \angle APB \quad \dots\dots \text{③}$$

$$AB = 2y_1,$$

$$PA = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2},$$

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (-y_1 - y)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 + y)^2} \end{aligned}$$

$\cos \angle APB = x_1$ を③に代入すると、

$$\begin{aligned} 4y_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (x_1 - x)^2 + (y_1 + y)^2 \\ &\quad - 2\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}\{(x_1 - x)^2 + (y_1 + y)^2\}} x_1 \\ &= x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 \\ &\quad + x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 + 2y_1y + y^2 \\ &\quad - 2\sqrt{(x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2)} \\ &\quad \frac{(x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 + 2y_1y + y^2)x_1}{2(x_1^2 + y_1^2) - 4x_1x + 2(x^2 + y^2)} \\ &\quad - 2\sqrt{\{(x_1^2 + y_1^2) + (x^2 + y^2) - 2x_1x - 2y_1y\}} \\ &\quad \frac{\{(x_1^2 + y_1^2) + (x^2 + y^2) - 2x_1x + 2y_1y\}x_1}{2 - 4x_1x + 2(x^2 + y^2)} \\ &\quad - 2\sqrt{\{1 + (x^2 + y^2) - 2x_1x - 2y_1y\}} \\ &\quad \frac{\{1 + (x^2 + y^2) - 2x_1x + 2y_1y\}x_1}{(2\text{より})} \end{aligned}$$

よって、 $2y_1^2 = 1 - 2x_1x + x^2 + y^2$

$$\frac{-\sqrt{(1 + x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y)}}{(1 + x^2 + y^2 - 2x_1x + 2y_1y)x_1}$$

すなわち

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{(1 + x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y)}}{(1 + x^2 + y^2 - 2x_1x + 2y_1y)x_1} \\ &= 1 - 2x_1x + x^2 + y^2 - 2y_1^2 \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\{(x^2 + y^2 - 2x_1x + 1) - 2y_1y\}}}{\{(x^2 + y^2 - 2x_1x + 1) + 2y_1y\}x_1} \\ &= (x^2 + y^2 - 2x_1x + 1) - 2y_1^2 \end{aligned}$$

ここで、 $X = x^2 + y^2 - 2x_1x + 1$ とおくと、

$$\sqrt{(X - 2y_1y)(X + 2y_1y)} x_1 = X - 2y_1^2$$

両辺を2乗すると、

$$(X^2 - 4y_1^2 y^2) x_1^2 = X^2 - 4y_1^2 X + 4y_1^4$$

すなわち

$$X^2(1 - x_1^2) - 4y_1^2 X + 4y_1^2(y_1^2 + x_1^2 y^2) = 0$$

つまり

$$y_1^2 X^2 - 4y_1^2 X + 4y_1^2(y_1^2 + x_1^2 y^2) = 0 \quad (\text{②より})$$

$$y_1 \neq 0 \text{ より } X^2 - 4X + 4(y_1^2 + x_1^2 y^2) = 0$$

上式を X について解くと、

$$\begin{aligned} X &= 2 \pm \sqrt{4 - 4(y_1^2 + x_1^2 y^2)} \\ &= 2 \pm 2\sqrt{1 - y_1^2 - x_1^2 y^2} \\ &= 2 \pm 2\sqrt{x_1^2 - x_1^2 y^2} \quad (\text{②より}) \\ &= 2 \pm 2x_1\sqrt{1 - y^2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } x^2 + y^2 - 2x_1x + 1 = 2 \pm 2x_1\sqrt{1 - y^2}$$

$$\text{すなわち } x^2 + y^2 - 1 = 2x_1(x \pm \sqrt{1 - y^2})$$

ここで $x^2 + y^2 \neq 1$ とすると $x^2 \neq 1 - y^2$ より

$$x \neq \pm\sqrt{1 - y^2} \text{ つまり } x \mp \sqrt{1 - y^2} \neq 0 \text{ (複号同順)}$$

よって、

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x \pm \sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{2}(x \mp \sqrt{1 - y^2})$$

ここで、 x_1 は固定されているので一定であるが、

$$\frac{1}{2}(x \pm \sqrt{1 - y^2}) \text{ は一定ではない。}$$

$$(x, y) = (1, 1) \text{ のときは } \frac{1}{2},$$

実際、である。

$$(x, y) = (-1, 1) \text{ のときは } -\frac{1}{2}$$

これは矛盾する。したがって、 $x^2 + y^2 = 1$ でなければならない。

このことは、点 $P(x, y)$ が①上にあることを示している。

このような設定の下で考えても一般性は失われないので、これで円周角の定理の逆が証明されたことになる。

§3. まとめ

本稿では Part I 「円周角の定理の解析的証明」と Part II 「円周角の定理の逆の解析的証明」を考察した。

数学Aで円周角の定理やその逆を扱うが、いわゆる古典的幾何であり、方程式で扱うこと、つまり解析的な扱いはしない。

先生方の中には解析的な、高校レベルの証明に関心のある方もおられると思うし、生徒の中にもそう考える者もいるであろう。先生方の指導の参考になれば幸いである。

計算は極力簡単になるように設定したが、それでも面倒であった。 $X = x^2 + y^2 - 2x_1x + 1$ とおくとうまくいくことに気付くまで少々時間を要した。

(山口県立岩国高等学校)