「関数の極大と極小」についての一考察

米江（よねえ）　慶典（よしのり）

§1. はじめに

関数の極大と極小は局所的な大小関係のみを問題にしていますが，微分可能性や連続性を前提とするか否かで捉え方は違ってきます。一般に，入試問題は微分可能性や連続性を仮定している場合が多く，生徒は極値を考えるときに無意識に「$f'(x)$ の符号の変化」のみを考えることが多いように思います。今回は，微分可能性や連続性がすぐには判断がつかない関数を取り上げ考えます。

§2. 定義

まずは参考文献から関数の極大（値）と極小（値）の定義を原文のまま掲載します。

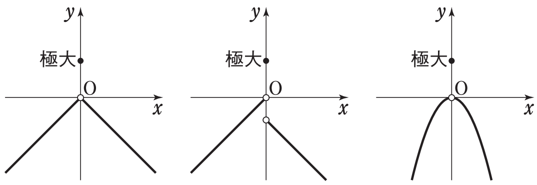
定義 1《連続性を前提としている》

> $f(x)$ は連続な関数とする。$x=a$ を含む十分小さい開区間において，$x \fallingdotseq a$ ならば $f(x)<f(a)$ であるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極大**であるといい，$f(a)$ を**極大値**という。
>
> また，$x=a$ を含む十分小さい開区間において，$x \fallingdotseq a$ ならば $f(x)>f(a)$ であるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極小**であるといい，$f(a)$ を**極小値**という。　　『参考文献〔1〕』

定義 2《連続性を前提としていない》

> $x=c$ を含む十分小さい開区間において $x \fallingdotseq c$ であるときつねに $f(c)>f(x)$ $(f(c)<f(x))$ がなりたつならば，$f(x)$ は $x=c$ で**極大**（**極小**）であるといい，$f(c)$ を**極大値**（**極小値**）という。　　『参考文献〔2〕』

定義 2 では例えば次の図のような場合があります。



§3. 考察

定義 2 で考えます。$-1<x<1$，$n=2,\ 3,\ \cdots$ で定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ はいずれも極大値 1 をとります。

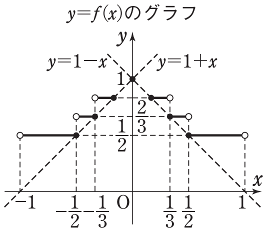
$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{n} & \left(\dfrac{1}{n} \leqq |x| < \dfrac{1}{n-1}\right), \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 & \left(\dfrac{1}{n} \leqq |x| < \dfrac{1}{n-1}\right) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$$

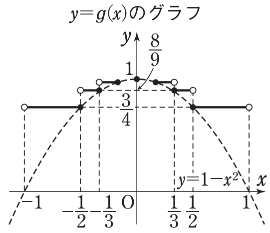
このとき，関数 $f(x)$ は $x=\pm\dfrac{1}{n}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ でのみ不連続であり，それ以外では $x=0$ も含めて連続になりますが，$x=0$ で微分可能ではありません。

一方，関数 $g(x)$ は $x=\pm\dfrac{1}{n}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ でのみ不連続であり，それ以外では $x=0$ も含めて連続になりますが，$x=0$ で微分可能で $g'(0)=0$ となります。

$y=f(x)$ のグラフ



$y=g(x)$ のグラフ



生徒の学習活動において考査あるいは演習時に，関数 $f(x)$，$g(x)$ について教科書の定義に従い連続性と微分可能性のそれぞれについて考えさせることは有意義だと考えます。また，連続性についてさら

に学習を深めたいと強く意思表示をしてくる生徒には，例えば『数学ワンポイント双書 20 イプシロン―デルタ』(田島一郎 著 共立出版) を推薦しています。

「関数の極大と極小」を扱った入試問題を考える上で，定義１の少なくとも連続性を仮定した出題が一般的だと考えます。考察で定義した２つの関数はいずれも $x=0$ で連続ですが，入試問題として出題する場合に学習指導要領の範疇なのか否か迷います。特に関数 $g(x)$ は $x=0$ で連続，しかも微分可能であり，$x=0$ の前後で $g'(x)$ の符号が変化しない $\left(x=\pm\frac{1}{n}\ (n=2,\ 3,\ \cdots)\right.$ では右側極限，左側極限を考えて符号が確定したとしても０$)$のに極大値をとる関数になります。

§4. おわりに

数学Ⅲの授業時に一部の生徒から「関数の挙動がつかみにくい」という声を耳にすることがありますが，多くは教科書の定義あるいは定理についておざなりな学習をしています。改めて，教科書の重要性を事あるごとに訴えなければならないと思いました。

発展的な内容ですが微分可能性と連続性に関する関連事項として，例えば「$x=0$ だけで連続で，その他の点では不連続な関数」，「いたるところ微分可能でない連続関数」などを授業に取り入れても興味深いと思います。ご意見いただければ幸いです。

最後に，拙稿『「三角形の面積」についての一考察』(数研通信64号) において，滋賀県の先生から大変貴重なご意見をいただきました。私が以前考えていた別の問題と繋がり，まさに「点と点が線になった」と思う一方で勉強不足を痛感しました。今後も学習指導の一助として「数研通信」を積極的に活用したいと思います。

《参考文献》

〔１〕『数学Ⅲ』数研出版

〔２〕『解析学』水野克彦 著 学術図書出版社

(鳥取県立米子白鳳高等学校)