循環小数の考察

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. 10^n-1 の素因数分解

まず，10^n-1（n は自然数）で表される数の素因数分解について考えてみたい。これらの数について，具体例をあげると

$n=1$ のとき $10^1-1=9$

$n=2$ のとき $10^2-1=99$

$n=3$ のとき $10^3-1=999$

などであり，どれも，明らかに 9 で割り切れる。従って，素数ではない。

10^n-1（n は自然数）で表される数は，9 で割り切れる。

（証明）　$f(x)=x^n-1$ とおく。

$f(1)=1^n-1=0$ だから，因数定理により，

$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

すなわち，$f(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

$x=10$ を代入して，10^n-1 が 9 で割り切れることがわかる。　（終わり）

$n=1$ から 10 までの場合，10^n-1 の素因数分解は次のようになる。

(i)　$n=1$ のとき $10^1-1=9=3^2$

(ii)　$n=2$ のとき $10^2-1=99=3^2\times11$

(iii)　$n=3$ のとき $10^3-1=999=3^3\times37$

(iv)　$n=4$ のとき $10^4-1=9999=3^2\times11\times101$

(v)　$n=5$ のとき $10^5-1=99999=3^2\times41\times271$

(vi)　$n=6$ のとき $10^6-1=999999$
$=3^3\times7\times11\times13\times37$

(vii)　$n=7$ のとき $10^7-1=9999999$
$=3^2\times239\times4649$

(viii)　$n=8$ のとき $10^8-1=99999999$
$=3^2\times11\times73\times101\times137$

(ix)　$n=9$ のとき $10^9-1=999999999$
$=3^4\times37\times333667$

(x)　$n=10$ のとき $10^{10}-1=9999999999$
$=3^2\times11\times41\times271\times9091$

§2. 循環小数について

循環小数には，循環する部分の桁数が小さいものもあれば，大きいものもある。たとえば

$\dfrac{1}{3}=0.\dot{3}$ の循環部分は 1 桁

$\dfrac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$　　は 6 桁

$\dfrac{1}{23}=0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$ は 22 桁

では，循環小数の循環部分の桁数について調べてみよう。

§3. 最も基本的な循環小数 $\dfrac{1}{10^n-1}$ の考察

$$\frac{1}{10^n-1}=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}$$ だから，これは

初項 $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$，公比 $\left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ の無限等比級数である。

たとえば

$\dfrac{1}{10^1-1}=\dfrac{1}{9}$ は初項 $\dfrac{1}{10}=0.1$，公比 $\dfrac{1}{10}=0.1$

の無限等比級数であり

$$\frac{1}{10^1-1}=0.1+0.1^2+0.1^3+\cdots$$
$$=0.\dot{1}$$
（循環部分 1 桁）

同じようにして

$\dfrac{1}{10^2-1}=0.\dot{0}\dot{1}$　（2 桁）

$\dfrac{1}{10^3-1}=0.\dot{0}0\dot{1}$　（3 桁）

……………………………

$\dfrac{1}{10^n-1}=0.\dot{0}0\cdots\dot{1}$　（n 桁）

である。

§4. 循環部分の桁数（基礎）

§1と§3を関連付けることにより，次のように整理できる。

$\frac{1}{3}=3\times\frac{1}{10^1-1}=0.\dot{3}$ （循環部分 1 桁）

$\frac{1}{11}=3^2\times\frac{1}{10^2-1}=9\times0.\dot{0}\dot{1}=0.\dot{0}\dot{9}$ （2 桁）

$\frac{1}{37}=3^3\times\frac{1}{10^3-1}=27\times0.\dot{0}0\dot{1}=0.\dot{0}2\dot{7}$ （3 桁）

$\frac{1}{101}=3^2\times11\times\frac{1}{10^4-1}$
$=99\times0.\dot{0}00\dot{1}=0.\dot{0}09\dot{9}$ （4 桁）

$\frac{1}{41}=3^2\times271\times\frac{1}{10^5-1}$
$=2439\times0.\dot{0}000\dot{1}=0.\dot{0}243\dot{9}$ （5 桁）

$\frac{1}{271}=3^2\times41\times\frac{1}{10^5-1}$
$=369\times0.\dot{0}000\dot{1}=0.\dot{0}036\dot{9}$ （5 桁）

$\frac{1}{13}=3^3\times7\times11\times37\times\frac{1}{10^6-1}$
$=76923\times0.\dot{0}0000\dot{1}=0.\dot{0}7692\dot{3}$ （6 桁）

$\frac{1}{239}=3^2\times4649\times\frac{1}{10^7-1}$
$=41841\times0.\dot{0}00000\dot{1}=0.\dot{0}04184\dot{1}$ （7 桁）

$\frac{1}{4649}=3^2\times239\times\frac{1}{10^7-1}$
$=2151\times0.\dot{0}00000\dot{1}=0.\dot{0}00215\dot{1}$ （7 桁）

$\frac{1}{73}=3^2\times11\times101\times137\times\frac{1}{10^8-1}$
$=1369863\times0.\dot{0}000000\dot{1}$
$=0.\dot{0}136986\dot{3}$ （8 桁）

$\frac{1}{137}=3^2\times11\times73\times101\times\frac{1}{10^8-1}$
$=729927\times0.\dot{0}000000\dot{1}$
$=0.\dot{0}072992\dot{7}$ （8 桁）

$\frac{1}{333667}=3^4\times37\times\frac{1}{10^9-1}$
$=2997\times0.\dot{0}0000000\dot{1}$
$=0.\dot{0}0000299\dot{7}$ （9 桁）

$\frac{1}{9091}=3^2\times11\times41\times271\times\frac{1}{10^{10}-1}$
$=1099989\times0.\dot{0}00000000\dot{1}$
$=0.\dot{0}00109998\dot{9}$ （10 桁）

§5. 循環部分の桁数（基礎その２）

§1と§3を関連付けることにより，次のようなこともわかる。

$10^5-1=99999=3^2\times41\times271$

であることを利用して

$\frac{1}{41\times271}=\frac{1}{11111}=3^2\times\frac{1}{10^5-1}$
$=9\times0.\dot{0}000\dot{1}=0.\dot{0}000\dot{9}$ （循環部分 5 桁）

$10^6-1=999999=3^3\times7\times11\times13\times37$

であることを利用して

$\frac{1}{13\times37}=\frac{1}{481}=3^3\times7\times11\times\frac{1}{10^6-1}$
$=2079\times0.\dot{0}0000\dot{1}=0.\dot{0}0207\dot{9}$ （6 桁）

$10^8-1=99999999=3^2\times11\times73\times101\times137$

であることを利用して

$\frac{1}{73\times137}=\frac{1}{10001}=3^2\times11\times101\times\frac{1}{10^8-1}$
$=9999\times0.\dot{0}000000\dot{1}$
$=0.\dot{0}000999\dot{9}$ （8 桁）

§6. 循環部分の桁数（応用）

たとえば，$\frac{1}{101}$ の循環部分は 4 桁，$\frac{1}{13}$ の循環部分は 6 桁であるが，$\frac{1}{101\times13}=\frac{1}{1313}$ の循環部分は何桁になるかを考えてみよう。

その準備として，m と n の最小公倍数を k とするとき，x^k-1 が x^m-1 と x^n-1 の公倍数であることを示す。

$k=mp=nq$ であるとする。

$x^m=X_1$ とおくと

$x^k-1={X_1}^p-1$
$=(X_1-1)({X_1}^{p-1}+{X_1}^{p-2}+\cdots+X_1+1)$

$x^n=X_2$ とおくと

$x^k-1={X_2}^q-1$
$=(X_2-1)({X_2}^{q-1}+{X_2}^{q-2}+\cdots+X_2+1)$

これより x^k-1 は

$X_1-1=x^m-1$，$X_2-1=x^n-1$ を因数にもつ。

従って x^k-1 は，x^m-1 と x^n-1 の公倍数である。

$x=10$ を代入すると，次のことがわかる。

m と n の最小公倍数を k とするとき 10^k-1 は 10^m-1 と 10^n-1 の公倍数である。

これより，$10^{12}-1$ は 10^4-1 と 10^6-1 の公倍数である。

$$
\begin{aligned}
10^{12}-1&=999999999999\\
&=3^3\times7\times11\times13\times37\times101\times9901
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{101\times13}&=\frac{1}{1313}\\
&=3^3\times7\times11\times37\times9901\times\frac{1}{10^{12}-1}\\
&=761614623\times0.\dot{0}0000000000\dot{1}\\
&=0.\dot{0}0076161462\dot{3} \qquad \text{(循環部分 12 桁)}
\end{aligned}
$$

§7. 循環小数にならないものをめぐって

$s=2^m\times5^n$ の場合は

(i) $m\geqq n$ のとき

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{2^m\times5^n}=\frac{5^{m-n}}{10^m}$$

(ii) $m<n$ のとき

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{2^m\times5^n}=\frac{2^{n-m}}{10^n}$$

であり，循環小数にはならない。

$\frac{1}{101}$ の循環部分は 4 桁，$\frac{1}{20}$ は循環しない。それらの積 $\frac{1}{101\times20}$ について調べてみよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{101\times20}&=3^2\times11\times\frac{1}{10^4-1}\times\frac{5}{10^2}\\
&=495\times\frac{1}{10^4-1}\times\frac{1}{10^2}\\
&=495\times0.00\dot{0}00\dot{1}\\
&=0.00\dot{0}49\dot{5}
\end{aligned}
$$

となり，循環部分は 4 桁であることがわかる。

§8. 循環部分の桁数（応用その 2）

§2 において，$\frac{1}{23}$ の循環部分が 22 桁であることを確認している。このことから，23 は $10^{22}-1=9999999999999999999999$ の約数ではないかと推測される。

$$
\begin{aligned}
10^{22}-1&=9999999999999999999999\\
&=3^2\times11^2\times23\times4093\times8779\times21649\times513239
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
&3^2\times11^2\times4093\times8779\times21649\times513239\\
&=434782608695652173913
\end{aligned}
$$

だから

$$\frac{1}{23}=0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$$

である。

2 と 5 を除く素数 p について，$\frac{1}{p}$ は循環小数になる。

従って，2 と 5 を除く素数 p は，適当な n をとれば 10^n-1 の約数である。そして，n の値を定めたいときには，循環小数 $\frac{1}{p}$ の循環部分の桁数から手がかりを得ればよい。

たとえば，素数 19 について

$$\frac{1}{19}=0.\dot{0}5263157894736842\dot{1} \qquad \text{(循環部分 18 桁)}$$

だから，19 は $10^{18}-1$ の約数である。

実際

$$
\begin{aligned}
10^{18}-1&=999999999999999999\\
&=3^4\times7\times11\times13\times19\times37\times52579\times333667
\end{aligned}
$$

である。

（京都府立網野高等学校間人分校）