極が円の内部にあるときの接線について

森島(もりしま)　充(みつる)

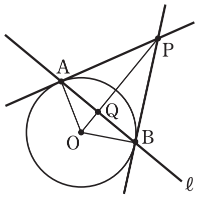
§1. はじめに

円 $C: x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から接線を2本引き，2つの接点 A，B を通る直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$$ax+by=r^2 \quad \cdots①$$

となります。証明は普通，接点を求めることなく，式を読み替えることで行いますが，生徒の評判はすこぶる悪いのが常です。

折衷案としては，図のように点Qを定めると，



$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=r^2 \quad \cdots②$$

が成り立つので，これから直線 ℓ の式は比較的容易に求まります。

点Pと直線 ℓ は極と極線と呼ばれます。

また，②から点Qは点Pの反転となっていることがわかります。

さて，点Pが円 C の周上にあるときは，ℓ を点Pにおける接線と定めることができます。しかし，点Pが円 C の内部にあるときも，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ であれば①の式は作れるので，①が定める直線 ℓ は存在します。でも，当然ながら接線は存在しません。

接線はどこへ行ったのでしょうか？

§2. 接点の座標と接線

円 C 上の点 $(X,\ Y)$ における接線が点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るとき，

$$\begin{cases} aX+bY=r^2 \\ X^2+Y^2=r^2 \end{cases}$$

です。

X，Y の値は，$\mathrm{OP}\geqq r$ のときは実数，$0<\mathrm{OP}<r$ のときは虚数となります。

簡単のために $r=1$，$a>0$，$b=0$ とすると，

$$\begin{cases} aX=1 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

ですから，

$$a\geqq 1 \text{ のとき} \quad (X,\ Y)=\left(\frac{1}{a},\ \pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$$

$$0<a<1 \text{ のとき} \quad (X,\ Y)=\left(\frac{1}{a},\ \pm\frac{\sqrt{1-a^2}\,i}{a}\right)$$

です。

ここで，虚数解を視覚化するために，$Y=s+ti$ とおきます。そして，z 軸を虚軸とする xyz 空間の点 $(X,\ s,\ t)$ を「接点」とします。

点Pは $(a,\ 0,\ 0)$ です。

このとき，

$$X^2+Y^2=1$$

より，

$$X^2+(s+ti)^2=1$$

X，s，t は実数ですから，

$$\begin{cases} X^2+s^2-t^2=1 \\ st=0 \end{cases}$$

したがって

[1]　$t=0$ のとき

$X^2+s^2=1$ より，

$$(X,\ s,\ t)=\left(\frac{1}{a},\ \pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{a},\ 0\right)$$

（ただし，$a\geqq 1$）

接線を xy 平面上で考えれば，

$$\frac{1}{a}x\pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}y=1,\ z=0$$

ですから，点 $\mathrm{P}(a,\ 0,\ 0)$ を通ります。

直線 ℓ は

$$x=\frac{1}{a},\ z=0 \quad \cdots①'$$

点Qは $\left(\frac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$ です。

[2]　$s=0$ のとき

$X^2-t^2=1$ より，

$$(X,\ s,\ t)=\left(\frac{1}{a},\ 0,\ \pm\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$$

(ただし，$0<a<1$)

これは，「接点」$(X,\ s,\ t)$ が zx 平面上の双曲線 $x^2-z^2=1$ 上にあることを示しています。

この点における双曲線の接線を zx 平面で考えると，

$$\frac{1}{a}x\mp\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}z=1,\ y=0$$

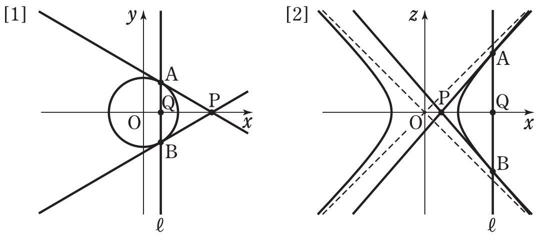
ですから，この接線もやはり点 P$(a,\ 0,\ 0)$ を通ります。

直線 ℓ は

$$x=\frac{1}{a},\ y=0 \quad \cdots ①''$$

点Qは $\left(\frac{1}{a},\ 0,\ 0\right)$ です。

[1] の xy 平面と，[2] の zx 平面を図にすると次のようになります。



2つの平面は x 軸を共有して直交しています。

§1 の直線 ℓ の式①は xyz 空間では

$$ax+by=r^2,\ z=0 \quad \cdots ①$$

と書けるので，①と①′ は一致しますが，①″ は一致しません。

そこで，直線 ℓ の定義を拡張して「2点 A，B を通り，直線 OP に垂直な平面」と定めると，

$$ax+by=r^2 \quad \cdots ①$$

$$x=\frac{1}{a} \quad \cdots ①'$$

$$x=\frac{1}{a} \quad \cdots ①''$$

となるので，①′，①″ は①を満たします。

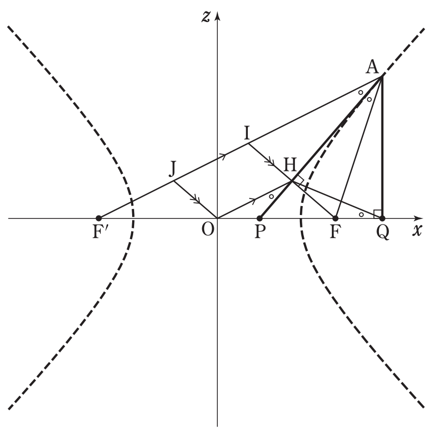
点Qに関しては，[1]，[2] のいずれの場合も②を満たしています。

§3. 補足

以上で接線がどこに行ったかは分かりました。

しかし，②が OP$\geqq r$ のときに図形的に簡単に示せたので，$0<$OP$<r$ のときも②が図形的に示せないとすっきりしません。以下はその略証です。

zx 平面上の双曲線 $\dfrac{x^2}{r^2}-\dfrac{z^2}{r^2}=1$ について，焦点を F，F′，双曲線上の x 座標が正である点Aにおける接線と x 軸との交点を P，点Aから x 軸に下ろした垂線の足をQとし，図のように点 H，I，J を定めます。



(a)　AP は ∠F′AF の二等分線です。

(b)　J は IF′ の中点で，AF′$-$AF$=2r$ より，OH$=r$ です。

(c)　4点 A，H，F，Q は同一円周上にあります。

(a)，(c)から，

△HOP∽△QOH

が示せます。

よって，

OP：OH＝OH：OQ

が成り立つので，(b)より②が示せました。

《参考文献》

〔1〕　数研出版『高等学校 数学Ⅲ』

〔2〕　佐々木重夫著『解析幾何学』養賢堂

(東京都立調布南高等学校)