同様に確からしいということ

内田　靖（うちだ　やすし）

§1. はじめに

確率については高校数学以前にも学習の機会があり，また，日常的にもよく使われる言葉であるため，高校数学で改めて確率を学ぶ段階では，生徒達はその言葉の意味をある程度理解している。例えば，硬貨を投げたとき，表が出るか裏が出るかしかなく(根元事象の理解)，それらはともに等しい確率で起こる(同様に確からしい)と彼等は考える。ところが，設定が少々複雑化すると「根元事象が同様に確からしい」かどうかの判断が鈍ることもあるようである。土台が揺らぐと正しい結果は得られない。そう言う意味で，確率を論じるための基盤としての「同様に確からしい」という概念を深く理解しておくことは不可欠であると言えよう。本稿では，確率の定義を再点検し,「同様に確からしい」という概念を指導するための教材と授業計画について考える。

§2. 確率の定義

高校程度の数学で，確率とは何かを厳密に定義(説明)することは，なかなか難しい問題である。ちなみに，数研出版の教科書『高等学校 数学A』では，確率を次のように定義している。

定義1(古典的確率)　1個のさいころを投げる試行では，どの目が出ることも同程度に期待できると考える。一般に，ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は**同様に確からしい**という。このような試行で，起こりうるすべての場合の数をN，事象Aの起こる場合の数をaとするとき，$\dfrac{a}{N}$を事象Aの**確率**といい，$P(A)$で表す。

これは，いわゆるラプラスによる確率の定義である。定義文中に「同程度に期待できる」とか「同様に確からしい」といった表現が使われているが，これらは「同じ確率である」という意味と考えてよいだろう。つまり，確率を定義するにあたり確率という言葉を用いていることになり，曖昧さが残された状態となっている。実は「同様に確からしい」という概念は，幾何学で言うところの「点」や「直線」と同じく未定義語で，それが何を意味するのかは考えないことにするというのが確率論における通念である。何か釈然としない部分ではあるが，W.フェラー著『確率論とその応用』に，次のような記述がある。

> 公理的な立場では数学は定義されない事柄の間の関係だけを取り扱うのである。…(中略)…
> チェスの盤や駒はチェスをするのに調法ではあるが，こういうものがなくてもやれないわけではない。本質的なことは駒がどう動き，どんな働きをするかを知ることである。歩とかキングの定義または本質ということを議論するのは意味がない。同様に，幾何学も点や直線が実際にどんなものかということは問題にしない。これらは定義されない概念として残っており，幾何学の公理がそれらの関係，たとえば2つの点が1直線を決定するといった関係を規定するのである。こういう公理がルールであって，別に神聖不可侵というようなものは何もない。別の幾何学を研究するためには，われわれは公理も変更する。

このように，ある物と物，数と数との関係だけに着目しながら確率論が発展し，20世紀初頭になって，コルモゴロフにより公理的確率と呼ばれる方法で確率が定義されることになる。

定義 2（公理的確率） 標本空間Ωの事象Eに，次の確率公理を満たすように実数を対応させる関数Pを確率（または確率測度）という。

(1) $0 \leqq P(E)$
(2) $P(\Omega)=1$
(3) $E_1, E_2, \cdots, \subset \Omega$ が互いに排反事象，すなわち $i \neq j \to E_i \cap E_j = \varnothing$ ならば

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

定義としての曖昧さは排除されたものの，その成り立ちの経緯から，定義中の$P(E_i)$が何を意味するのかは全く語られない。したがって，この方法では確率という言葉のもつ本来の意味，すなわち，偶然の出来事に対する挑戦という実践的側面が失われてしまっていて，残念ながら高校数学には馴染まない。やはり，高校数学における確率の定義はラプラスの方法に頼るのが適当と言える。

さて，それでは「同様に確からしい」という未定義語について，改めて追求しよう。教科書に書かれた定義を見直すと，冒頭に「同程度に期待できると考える」と記してある。これは，すなわち「同じ頻度で起こると仮定する」ということにほかならない。しかし，いったい何を根拠に同様に確からしいと仮定するのか。結論から言うと，これは経験に基づくものと考えるのが合理的と言ってよさそうである。例えば，硬貨を投げたとき，表が出る確率も裏が出る確率も同様に確からしく，$\frac{1}{2}$ であると仮定する事は経験的に自然であると考えられる。実際，表と裏が均一に作られた硬貨で，何度も何度も硬貨投げを繰り返し，その結果を記録していけば，表と裏が平等に出ることが確かめられるはずである。さて，確率には相対頻度という概念を用いた定義がある。

定義 3（統計的確率） ある試行を同じ条件のもとでn回繰り返したとき，事象Aがr回起こったとする。このとき，$\frac{r}{n}$をこの試行に対する事象Aの相対頻度という。試行回数が増加するにしたがって，相対頻度がある定数pに収束すると認められるとき，値pをこの試行のもとで事象Aが起こる統計的確率という。

先程，根元事象が同様に確からしいと仮定する根拠を「経験に基づくもの」と記したが，言い換えると，その根拠を統計的確率に求めるのが自然であると言ってもよい。そう言う意味で，

・サイコロを振ったときのそれぞれの目の出方
・よくきったトランプから1枚を抜き出すときのそれぞれのカードの選び方
・袋の中から無作為に1つのボールを取り出すときのそれぞれのボールの取り出し方

などはどれも同様に確からしいと仮定しようということになる。ちなみに，ジャンケンをするときも，チョキを多く出す癖のある人や頑固にグーしか出さない人はいないと仮定する。そして，そのように仮定しない限り，確率は定義できない（求められない）のである。

もう少し複雑なケースを考えてみよう。例えば，次の問題にはどのように対処すれば良いだろうか。

> 2個のサイコロを投げたとき，目の和が5になる確率を求めよ。

この問題に対しては，次のような2通りの解答が考えられる。

❶ 2個のサイコロに区別がつく場合

起こりうるすべての場合の数は

$$\left.\begin{array}{lllll}(1,\ 1) & (1,\ 2) & (1,\ 3) & \cdots & (1,\ 6)\\ (2,\ 1) & (2,\ 2) & (2,\ 3) & \cdots & (2,\ 6)\\ (3,\ 1) & (3,\ 2) & (3,\ 3) & \cdots & (3,\ 6)\\ & \cdots & & \cdots & \cdots\\ (6,\ 1) & (6,\ 2) & (6,\ 3) & \cdots & (6,\ 6)\end{array}\right\} 36\text{通り}$$

目の和が5になる場合の数は

$(1,\ 4)\ (2,\ 3)\ (3,\ 2)\ (4,\ 1) \to$ 4通り

よって，目の和が5になる確率は $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

❷ 2個のサイコロに区別がつかない場合

起こりうるすべての場合の数は

$$\left.\begin{array}{lllll}\{1,\ 1\} & \{1,\ 2\} & \{1,\ 3\} & \cdots & \{1,\ 6\}\\ & \{2,\ 2\} & \{2,\ 3\} & \cdots & \{2,\ 6\}\\ & & \{3,\ 3\} & \cdots & \{3,\ 6\}\\ & & & \cdots & \cdots\\ & & & & \{6,\ 6\}\end{array}\right\} 21\text{通り}$$

目の和が5になる場合の数は

$\{1,\ 4\}\ \{2,\ 3\} \to$ 2通り

よって，目の和が5になる確率は $\frac{2}{21}$

生徒達は確率の定義が明示されていなくても，サイコロに区別がつくかつかないかで，確率の値が変わるはずはないと直感的に判断する。その上で，なんとなく❷はおかしいと感じるようで，そのうちに，おのずと❷の21通りが同様に確からしいのかという話題になる。「同様に確からしい」ということが未定義語である以上，❷の21通りが同様に確からしいと仮定することも可能なはずであるが，例えば，「両方とも⚀が出る」という事象と「一方に⚀が出て他方に⚁が出る」という事象は同様に確からしいと言って良いかと質問すると，おそらく全員が「良くない」と答えるに違いない。それは，サイコロ投げを繰り返し行い結果を記録していけば，その仮定は否定されるはずだと考えるからである（その経験がなくても！）。これを1つの説得材料として，ふつう，授業では次のように宣言する。

確率の計算では，サイコロ，カード，ボール，箱，くじ，…等はすべて区別がつくとして，事象を数え上げげたときに，根元事象が同様に確からしいと仮定してよい。

少々，押しつけがましいが，離散型の確率についてはこれで乗り切ることができる。ただし，これはあくまで高校数学の範囲における共通理解であって，我々の有している感覚と統計的結果とのズレや解釈の多様性によるパラドックスが生じることもある。確率の導入で話をややこしくするのは得策ではないが，「同様に確からしい」ということの理解を深めるために，次の2つの話題はチェックしておきたい。

・ボーズ-アインシュタインの統計
・ベルトランの逆説

これらについては，参考文献〔3〕〔4〕などに詳しい解説が記されているので，興味のある方はそちらをご覧いただくとして，ここではその概要のみ触れておく。

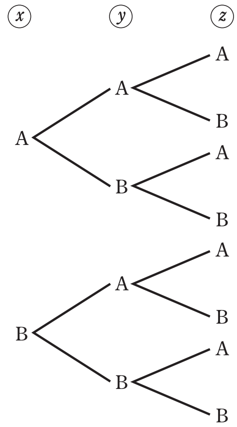
§3. ボーズ-アインシュタインの統計

W.フェラー著『確率論とその応用』の第I章の冒頭に，離散型標本空間における確率を語る上で欠くことのできない例の1つとして

r 個のボールを n 個の箱に分配する問題

が記されている。この問題は，高校数学においても重要なテーマの1つである。例えば，「3個のサイコロを投げたときに起こりうる結果」は「3個のボールを6個の箱に分配する方法」と本質的に同値であるなど，多くの問題がこの問題の考え方に帰着できる。

いま，3個のボールを2個の箱に分配する方法を考える。3個のボール x，y，z が2個の箱A，Bのどちらに入るかに着目して樹形図を記す。



すなわち，分配の方法は全部で

$2^3=8$ 通り

であり，{　}内の仕切り|の左側が箱A，右側が箱Bを表すとして，これら8通りすべてを列挙すると，次のようになる。

(1)
$\{xyz|\}$　$\{xy|z\}$　$\{xz|y\}$　$\{yz|x\}$
$\{x|yz\}$　$\{y|xz\}$　$\{z|xy\}$　$\{|xyz\}$

ボールを無作為に箱に入れるとすれば，これら8通りはすべて同様に確からしく，いずれが起こる確率も $\dfrac{1}{8}$ と仮定してよいはずである。このように仮定する確率モデルを物理学の世界では『マックスウェル-ボルツマンの統計』と言う。今，3個の気体粒子を考え，空間を2箇所の区画A，Bに区切って，どの粒子もいずれかの区画に入るようにしておく。粒子は区別がつかないので，起こりうる場合は

${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3=4$ 通り

で，次のように表すことができる。

(2)　{●●●|} {●●|●} {●|●●} {|●●●}

さて，これまでの議論では，「同様に確からしい」と仮定する根拠を統計的確率に頼ること，そして，そのためにはボールも箱も区別がつくものとして，根元事象を数えるのが合理的であると考えた。したがって，(2)の 4 通りが同様に確からしいと仮定することは不適切で，(1)で示した通り，(2)の $\{\bullet\bullet\bullet|\}$ と $\{|\bullet\bullet\bullet\}$ の起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{8}$，$\{\bullet\bullet|\bullet\}$ と $\{\bullet|\bullet\bullet\}$ の起こる確率はそれぞれ $\frac{3}{8}$ とするのが適切であると言える。物理学の世界では，長年に渡りこの気体粒子の運動がマックスウェル-ボルツマンの統計に従うこと，すなわち(1)で考えた n^r 通りの根元事象が同様に確からしいことを証明しようと多くの実験が試みられたがうまくいかず，驚いたことに，(2)のような ${}_n\mathrm{H}_r$ 通りの根元事象が同様に確からしいと仮定すると，実験結果に適することが認められた。すなわち，(2)の 4 通りの起こる確率がいずれも $\frac{1}{4}$ であると仮定することが合理的であるという事態が起こったわけである。このように仮定する確率モデルを『ボーズ-アインシュタインの統計』と呼ぶ。

さらに研究は進み，区別できない r 個のボールを n 個の箱に分配し，しかも 1 つの箱には 1 つのボールしか入らない (したがって，この場合は $n \geqq r$) としたときに起こりうるすべての場合の数である ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りが，同様に確からしいと仮定する確率モデルが存在することも認められており，これを『フェルミ-ディラックの統計』と呼ぶ。

確率という概念に実践的側面を持たせるのであれば，現実に成り立たない確率モデルと認められればそれを捨て，新たなモデルを構築しなくてはならない必要も生じることを理解しなくてはならない。

§4. ベルトランの逆説

議論を展開する準備として，ラプラスによる確率の定義を拡張した，幾何学的確率を定めておく。

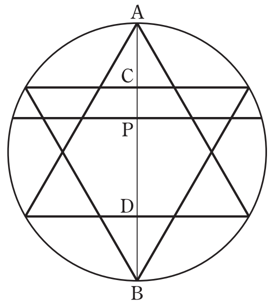
定義 4 (幾何学的確率)　ある図形 S に対して，S の測定値 (例えば，長さ，面積，体積など) を $m(S)$ で表す。このとき，点 P が S の一部分 A に含まれる確率を $\frac{m(A)}{m(S)}$ と定める。

この場合，与えられた図形上には点が一様に存在し，いずれの点の選び方も同様に確からしいと仮定しているのである。ところが，点の選び方次第で異なった結果が得られるというのが，次の問題である。

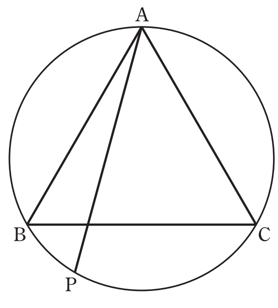
> 与えられた円において無作為に 1 つの弦を引くとき，その長さが内接正三角形の 1 辺の長さよりも長くなる確率はいくらか。

ベルトランはこれに関して，様々な可能性があることを主張したと言われている。

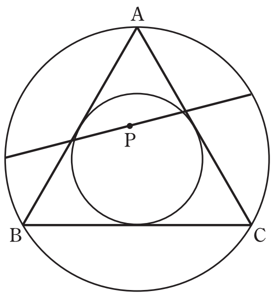
【解 1】　与えられた円の 1 つの直径 AB 上に無作為に点 P をとり，P を通り直径 AB に垂直な弦を考える。図のように点 C，D をとると，点 P が線分 CD 上にあるとき弦の長さは内接正三角形の 1 辺よりも長くなる。線分 CD の長さは直径 AB の $\frac{1}{2}$ であるから，求める確率は点 P が線分 CD 上にある確率，すなわち $\frac{1}{2}$ である。



【解 2】　点 A を 1 つの頂点とした内接正三角形 ABC を考え，A と異なる円周上の点 P を無作為にとる。弦 AP の長さは点 P が劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上にあるとき，内接正三角形の 1 辺よりも長くなる。劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の長さは円周の $\frac{1}{3}$ であるから，求める確率は点 P が劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上にある確率，すなわち $\frac{1}{3}$ である。



【解３】 円の内部の点Ｐを無作為に選び，点Ｐが中点となるような弦を考える。点Ｐが与えられた円の同心円で，半径が $\frac{1}{2}$ の小円の内部にあれば，弦の長さは内接正三角形の１辺より長くなる。小円の面積はもとの円の面積の $\frac{1}{4}$ であるから，求める確率は，点Ｐが小円の内部にある確率，すなわち $\frac{1}{4}$ である。



この問題とそれに対する上記のようないくつかの解釈を『ベルトランの逆説』と呼ぶ。これら複数の解釈の存在は，そもそも同様に確からしいとする基準が不明瞭であることに由来している。実際，上記の解答はそれぞれ，次の試行の結果が同様に確からしいと仮定した上に展開されている。

⑴ 直径上に無作為に点Ｐを選ぶ
⑵ 円周上に無作為に点Ｐを選ぶ
⑶ 円の内部に無作為に点Ｐを選ぶ

そして，我々はこれらのどれが真でどれが偽であるのかの判断基準を持ちあわせず，異なる仮定からは異なる結果が得られることのみを理解する。§2でW. フェラーの記述を引用したが，まさに，数学が『定義されない事柄の間の関係だけを取り扱う』学問へと成熟していく過程を垣間見ることができる事例である。

§5. 終わりに

§2で述べたサイコロの問題以外にも，物に区別がつくと考えなくては正しい結果が得られないことを強調するのに適した問題は多くある。数研出版の教科書にも記載されている，次の例題なども誤解されやすい問題の１つである。

赤玉４個と白玉５個の入った袋から，２個の玉を同時に取り出すとき，赤玉１個，白玉１個が出る確率を求めよ。

授業ではこういった問題を通して，生徒達に「根元事象は何なのか」そして「それらの根元事象は同様に確からしいと仮定してよいか」を考えさせながら，確率を求めさせることが大切である。

§3や§4で紹介したテーマは，§2の結論を否定するかのような内容となっているが，むしろ高校数学の守備範囲をしっかり確認するための話題と捉えていただきたい。これらについては，一旦確率を学習し終えた後の『課題学習』として位置づけるのが適当ではないかと考える。特に，『ベルトランの逆説』については，あらかじめ生徒達に彼等なりの解答を考えさせながら，何が問題なのかを気付かせることが必要である。このような話題を通して，数学や物理学に興味を持つ生徒が増えてくれることを期待する。

《参考文献》

〔１〕『高等学校 数学Ａ』数研出版
〔２〕 W.フェラー著，河田瀧夫監訳『確率論とその応用Ⅰ上』紀伊國屋書店
〔３〕 武隈良一著『確率』培風館（現代数学シリーズ）
〔４〕 小針晛宏著『確率・統計入門』岩波書店

（大阪府　清教学園高等学校）