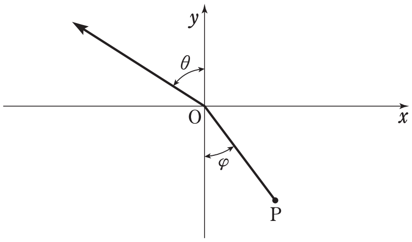
浮き上がり曲線

中村（なかむら）　公一（こういち）

§0. はじめに

光が水中から空中に出るとき屈折します。屈折のしかたには法則があり，図1にあるようにx軸より下を水中，上を空中としたとき，点Pから出た光は入射角φ，屈折角θとして $\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi}=n$ という式に従います。

図1



この屈折がおきるのは，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲です。入射角φと屈折角θが大きくなって，θが$\dfrac{\pi}{2}$を，同時にφが$\varphi_{\max}$を超えると光は屈折せずに水面で反射してしまいます。（ここで，$\sin\varphi_{\max}=\dfrac{1}{n}$ $\varphi_{\max}$ は臨界角ということです。）

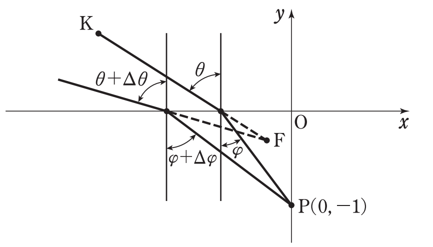
ここでnは定数で，屈折率と呼ばれ，水と空気の場合1.3くらいの数字になります。角度θを変化させても，一定値nを保つのが不思議ですが，この屈折のおかげで，水中にあるものを空中から見ると実際の位置より上方へ浮き上がって見えます。微分を使った光学の問題でよくありますが，真上から見ると深さ$\dfrac{1}{n}$まで浮き上がることが知られています。プールなどでも実感したことがある方が多いと思います。さらにプールで足元から離れたところにある底の面が足元以上に浮き上がって見えることも知っています。たとえば足元から底の面にまっすぐ水平に描いてあるラインは，遠くにいけばいくほど上に浮き上がって見えますが，この曲線は何かきれいな方程式になるのでしょうか。挑戦してみると意外にめんどうな計算になりましたが，高校の数学Ⅲの知識があれば解明できます。

計算を少しでも楽にするために，水面をx軸とし，プールの深さを1とします。つまり水中にあるラインの方程式は $y=-1$ とします。最終目標としては，水面から高さhの地点，座標$(0,\ h)$からこのラインを見たとき，浮き上がりにより生じた見かけの曲線の方程式を求めることとします。

§1. ステップ1

図2で点$\mathrm{P}(0,\ -1)$から出た光を空中の点Kから見た場合，Pがどの地点に浮き上がって見えるか求めます。

図2



Kを通る直線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{\tan\theta}(x+\tan\varphi)\quad\cdots①$$

Kを少し外れる直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{\tan(\theta+\varDelta\theta)}\{x+\tan(\varphi+\varDelta\varphi)\}\quad\cdots②$$

ここで，θ，$\theta+\varDelta\theta$，φ，$\varphi+\varDelta\varphi$は，0と$\dfrac{\pi}{2}$の間の角とし，屈折率nも1より大と設定しておきます。

2直線の交点を求めると，①と②の連立方程式を解くことにより

$$x=\frac{\tan(\varphi+\varDelta\varphi)\tan\theta-\tan\varphi\tan(\theta+\varDelta\theta)}{\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta}$$
$$=-\tan\varphi+\frac{\tan\theta\{\tan(\varphi+\varDelta\varphi)-\tan\varphi\}}{\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta}$$

$$y=-\frac{\tan(\varphi+\varDelta\varphi)-\tan\varphi}{\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta}$$

ここで，$\varDelta\varphi\to0$ のとき，$\varDelta\theta\to0$ でもありますが，このときの x と y の極限値が，Pの見かけの位置になります。その点を $\mathrm{F}(x_0,\ y_0)$ とおきます。

一方，屈折率から $\dfrac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\dfrac{\sin(\theta+\varDelta\theta)}{\sin(\varphi+\varDelta\varphi)}=n$ ですから $\sin(\theta+\varDelta\theta)-\sin\theta=n\{\sin(\varphi+\varDelta\varphi)-\sin\varphi\}$ なので

$$\lim_{\varDelta\varphi\to0}\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta\theta}=\frac{1}{n}\lim_{\varDelta\varphi\to0}\left\{\frac{\varDelta\varphi}{\sin(\varphi+\varDelta\varphi)-\sin\varphi}\times\frac{\sin(\theta+\varDelta\theta)-\sin\theta}{\varDelta\theta}\right\}=\frac{1}{n}\frac{(\sin\theta)'}{(\sin\varphi)'}=\frac{1}{n}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}$$

を利用して

$$x_0=-\tan\varphi+\tan\theta\lim_{\varDelta\varphi\to0}\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta\theta}\frac{\dfrac{\tan(\varphi+\varDelta\varphi)-\tan\varphi}{\varDelta\varphi}}{\dfrac{\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta}{\varDelta\theta}}$$

$$=-\tan\varphi+\tan\theta\cdot\frac{1}{n}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\frac{(\tan\varphi)'}{(\tan\theta)'}$$

$$=-\tan\varphi+\frac{1}{n}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cos^3\varphi}\quad\cdots③$$

$$y_0=-\lim_{\varDelta\varphi\to0}\frac{\varDelta\varphi}{\varDelta\theta}\frac{\dfrac{\tan(\varphi+\varDelta\varphi)-\tan\varphi}{\varDelta\varphi}}{\dfrac{\tan(\theta+\varDelta\theta)-\tan\theta}{\varDelta\theta}}=-\frac{1}{n}\frac{\cos^3\theta}{\cos^3\varphi}\quad\cdots④$$

屈折率より $\sin\theta=n\sin\varphi$ なので，すべてパラメータ φ で表すと

$$x_0=-\tan\varphi+\frac{1}{n}\frac{(1-n^2\sin^2\varphi)n\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=-(n^2-1)\tan^3\varphi\quad\cdots⑤$$

$$y_0=-\frac{1}{n}\frac{(1-n^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\varphi}$$

$$=-\frac{1}{n}\{1-(n^2-1)\tan^2\varphi\}^{\frac{3}{2}}\quad\cdots⑥$$

これは空中の色々な向きから点Pを見た時の，見かけの点Fの位置を表しています。特に $\varphi=0$ としたときの結果 $x_0=0$，$y_0=-\dfrac{1}{n}$ とも一致しているので，$\varphi=0$ も定義域に加えられます。φ を負に設定しても y 軸と対称な位置にPがくるようになるので，入射角 φ の範囲は $-\varphi_{\max}<\varphi<\varphi_{\max}$ まで拡張できます。

さらに $\tan\varphi_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ になりますから，

$-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}<\tan\varphi<\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ でもあります。

せっかくなので，⑤と⑥から φ を消去すると，

$$y_0=-\frac{1}{n}\left\{1-(n^2-1)^{\frac{1}{3}}x_0^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}\quad\cdots⑦$$

となります。ここで，$x^{\frac{2}{3}}$ とか $x^{\frac{4}{3}}$ などの分数指数は厳密には $x>0$ でしか定義しないようですが，記述を簡単にするために以降では実数値として意味を持つように配慮しながら使用するものとします。

⑦はあまり美しい式ではありませんでした。

定義域は $-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ になります。

§2. ステップ2

ステップ1で使用した点Pを直線 $y=-1$ 上で動かします。それによってPから出た光が点 $\mathrm{K}(0,\ h)$ を通過するようにした場合，見かけの点Fの座標を求めます。

図3

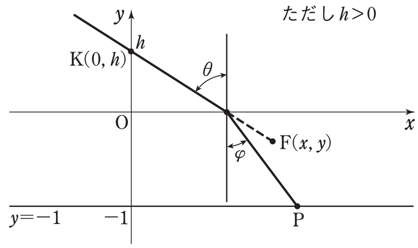


図3のようにPを x 軸方向へ $h\tan\theta+\tan\varphi$ だけ平行移動すればよいので，同じ平行移動でFも移動します。Fの平行移動後の座標を改めて $\mathrm{F}(x,\ y)$ とおくと，③と④から

$$x=h\tan\theta+\frac{1}{n}\frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cos^3\varphi}$$

$$y=-\frac{1}{n}\frac{\cos^3\theta}{\cos^3\varphi}\ \text{です。}$$

これと屈折率からの $\sin\theta=n\sin\varphi$ を組み合わせて，φ と θ を消去できれば良いのですが，簡単ではないので，少し工夫します。

図3より $\mathrm{KF}^2=x^2+(h-y)^2=r^2$ とおきます。(ただし，$r>0$)

すると，$r\sin\theta=x$，$r\cos\theta=h-y$ になります。

$y=-\dfrac{1}{n}\dfrac{\cos^3\theta}{\cos^3\varphi}$ より，

$$\sqrt[3]{y^2}=\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\varphi}\quad(\text{ただし } y<0)$$

$$\left(\text{屈折率から }\sin\varphi=\frac{1}{n}\sin\theta\right)$$

$$=n^{-\frac{2}{3}}\frac{\cos^2\theta}{1-\dfrac{1}{n^2}\sin^2\theta}$$

$$=n^{\frac{4}{3}}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2n^2-r^2\sin^2\theta}$$

$$=n^{\frac{4}{3}}\frac{(h-y)^2}{\{x^2+(h-y)^2\}n^2-x^2}$$

$$=\frac{n^{\frac{4}{3}}(h-y)^2}{n^2(h-y)^2+(n^2-1)x^2}$$

$$n^2(h-y)^2+(n^2-1)x^2=n^{\frac{4}{3}}(h-y)^2y^{-\frac{2}{3}}$$

$$(n^2-1)x^2=(h-y)^2\left(n^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-n^2\right) \quad \cdots ⑧$$

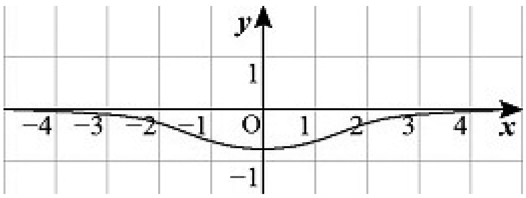
が最終的にまとめられた曲線の方程式になります。ただし，$y<0$ です。きれいな方程式になることを期待していたので，このような複雑な陰関数形式でちょっとがっかりです。

なお結果的に⑧は屈折率 1 すなわち $n=1$ の場合の解 $y=-1$ もふくんでいます。

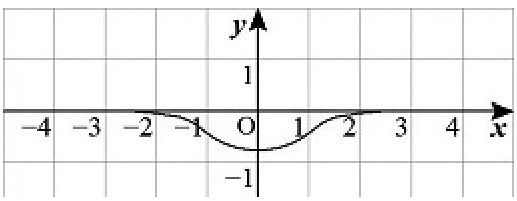
§3. 検証

一応確認のため，このグラフを描いてみたくなりました。$n=1.3$ として，パソコンで描きました。

$h=1$ のとき



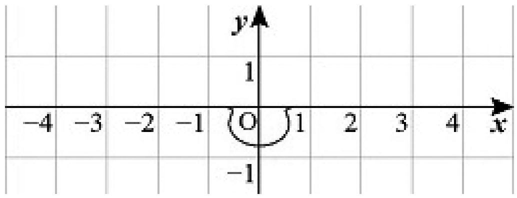
$h=0.5$ のとき



これらは，現実によくあてはまっています。

⑧で，$y \to -0$ としていくと，右辺 $\to \infty$ なので $x \to \pm\infty$ であり，x 軸が漸近線になります。つまり理論的には限りなく遠方の底の面まで見えて，遠くの面は水面にだんだん近付いてくるという結果になります。

$h=0.1$ のとき



ラインの両側が内側に向かい，ひっくり返ったような反り返りが生じています。見たことない状態なので計算間違いとパソコンソフトの計算精度の問題かなと最初思ったわけですが，念のため反り返りが理論式⑧から生じるのか検証してみました。曲線の対称性を考慮して，$x>0$ の範囲で接線の傾きが負になる，つまり微分係数が負になる点があるかどうか調べればよいのです。

⑧の両辺を x で微分します。

$$2(n^2-1)x=\frac{dy}{dx}\cdot\left\{-2(h-y)\left(n^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-n^2\right)-\frac{2}{3}(h-y)^2n^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{3}}\right\}$$

$$=\frac{dy}{dx}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)n^{\frac{4}{3}}(h-y)y^{-\frac{5}{3}}\left(h+2y-3n^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}\right)$$

ここで，$x>0$，$y<0$，$n>1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ の符号は，$f(y)=h+2y-3n^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}$ の符号と一致します。そこに目をつけて，

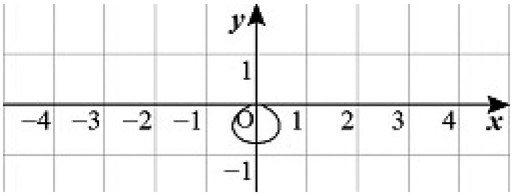
$$f'(y)=2-5n^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

増減表から $f(y)$ は $y=-\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$ のとき極小値 $h-\dfrac{8\sqrt{10}}{125n}$ という値をとります。

よって $0<h<\dfrac{8\sqrt{10}}{125n}$ のとき，曲線は反り返りを生ずることがいえます。限界値 $\dfrac{8\sqrt{10}}{125n}$ は，$n=1.3$ のとき，およそ 0.16 くらいになります。つまり水深の 16％以内の距離まで水面に近付いてみた場合，底の面の反り返りが見れるという結果です。広口の壺の中をのぞくような状態になります。

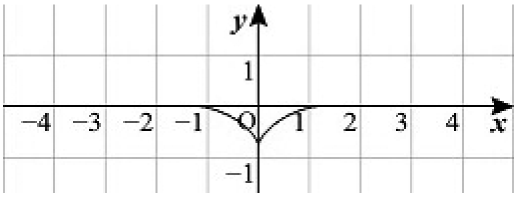
ところで，⑧で遊び心で $h=0$ としてみました。視点を水面に接する位置にもってきた場合にあたりますが，式は $(n^2-1)x^2=(ny)^{\frac{4}{3}}-(ny)^2$ というシンプルな形になりグラフは次図のようになります。

$h=0$ のとき



反り返りの究極状態です。今のところ，現実にはありえない空想の曲線ですが，何か特殊な環境だと実現できるかもしれません。

あと興味があるのは，ステップ１で求めた曲線⑦ですが，それは，水中の１点を空中から移動しながら眺めたときの見かけの軌跡ですが，下のような結果になりました。



これは臨界角の影響で，点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}},\ 0\right)$ がグラフの両端になります。

$n=1.3$ では $(\pm 1.2,\ 0)$ くらいです。

《参考》

グラフ描画に関しては友田勝久氏作成のパソコン用フリーソフトの GRAPES を利用させていただきました。

公式サイト

www.osaka-kyoiku.ac.jp/～tomodak/grapes/

補足

GRAPES で描画する場合，$y<0$ ですので，$y^{-\frac{2}{3}}$ の部分は $(y^2)^{-\frac{1}{3}}$ のように底が負にならないように工夫してください。また，GRAPES では $y\geqq 0$ の部分も描画されると思いますが，今回のテーマではその部分は定義域外です。掲載したグラフも見やすいように意図的に $y\geqq 0$ の部分は消してあります。その点ご承知ください。

（長野県立飯山北高等学校）