真分数を 2 個の単位分数の和で表す場合の数とその単位分数の値について

佐々木（ささき）　正敏（まさとし）

§1. 目的

真分数 $\dfrac{m}{n}$ ($1 \leqq m < n$, m, n は互いに素な自然数) を与えて, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 x, y ($x \leqq y$) を求めるとき, 与えられた $\dfrac{m}{n}$ に対して何組の(x, y) が定まるかを調べ, x, y の値を求めたい。

いま, l 個の単位分数を用いて $\dfrac{m}{n}$ を表すときの場合の数を $\varphi_l\left(\dfrac{m}{n}\right)$ で表すと, 例えば $\dfrac{5}{66}$ は

$\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{231}$, $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{990}$, $\dfrac{1}{22}+\dfrac{1}{33}$ の 3 通りに表すことができるから, $\varphi_2\left(\dfrac{5}{66}\right)=3$ とかける。

§2. $m=1$ の場合

まず $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{n}$ …① ($n \geqq 2$) を満たすx, y ($x \leqq y$) が何組あるかを考える。

①を変形して

$$(x-n)(y-n)=n^2 \quad \cdots②$$

ここで a, b を $n^2=ab$ (ただし $a \leqq b$) を満たす n^2 の約数とすると, x, y は

$x=n+a$, $y=n+b$　とおける。

したがって, n を素因数分解したとき, p, q, r, …を素数, α, β, γ, …を自然数として

$n=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots$ となるとき, $n^2=p^{2\alpha}q^{2\beta}r^{2\gamma}\cdots$ となるから, ②を満たす x, y は大小を考慮しなければ

$x=n+p^{\alpha_1}q^{\beta_1}r^{\gamma_1}\cdots$, $y=n+p^{\alpha_2}q^{\beta_2}r^{\gamma_2}\cdots$

(ただし, $\alpha_1+\alpha_2=2\alpha$, $\beta_1+\beta_2=2\beta$, $\gamma_1+\gamma_2=2\gamma$, …, 各数は 0 以上の整数) で与えられる。

したがって, その総数は $(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\cdots$ 個で与えられる。

このとき $x \leqq y$ を満たす (x, y) の組の中には必ず $x=y$ の場合 (ともに $2n$) が 1 組含まれるから,

$$\varphi_2\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1+(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1)\cdots}{2}$$

で与えられる。例えば $n=12$ のとき $12=2^2 3^1$ より $\alpha=2$, $\beta=1$ となるから

$$\varphi_2\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{1+(2\cdot2+1)(2\cdot1+1)}{2}=8 \quad \text{となる。}$$

特に n が素数の場合を考えると, ②を満たす x, y は $x=n+1$,　$y=n+n^2$ と $x=n+n$,　$y=n+n$ の 2 組だけなので, このときの場合の数は 2 となる。

§3. $m=2$ の場合

次に $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{n}$ …③ ($n \geqq 3$, n は奇数の自然数) を満たす x, y ($x \leqq y$) が何組あるかを考える。

③を変形して

$$(2x-n)(2y-n)=n^2 \quad \cdots④$$

したがって, §2 と同様の文字を使うと, ④を満たす x, y は大小を考慮しなければ

$$x=\frac{n+p^{\alpha_1}q^{\beta_1}r^{\gamma_1}\cdots}{2},\quad y=\frac{n+p^{\alpha_2}q^{\beta_2}r^{\gamma_2}\cdots}{2}$$

で与えられる。

$m=2$ の場合は, n やその素因数はすべて奇数になるから, これらの x, y はすべて自然数となり, $\left(\dfrac{n+p^{\alpha_1}q^{\beta_1}r^{\gamma_1}\cdots}{2},\ \dfrac{n+p^{\alpha_2}q^{\beta_2}r^{\gamma_2}\cdots}{2}\right)$ と $(n+p^{\alpha_1}q^{\beta_1}r^{\gamma_1}\cdots,\ n+p^{\alpha_2}q^{\beta_2}r^{\gamma_2}\cdots)$ は 1 対 1 に対応する。したがって, 場合の数は $\varphi_2\left(\dfrac{1}{n}\right)$ と同じになり, $\varphi_2\left(\dfrac{2}{n}\right)=\varphi_2\left(\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立つ。

また, n が奇数のとき $\dfrac{1}{n}$ を表す 2 つの単位分数の分母は必ず偶数になるから, 分母を半分にするこ

とで $\dfrac{2}{n}$ を表す2つの単位分数が得られる。例えば

$\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{30}$，$\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}$ であるから

$\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}$，$\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}$ で与えられる。

§4. 一般の場合

$m\geqq 3$ の場合も同様に考えることができる。

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{m}{n}$ …⑤ $(3\leqq m<n)$ を変形して

$$(mx-n)(my-n)=n^2 \quad \cdots⑥$$

ここで a，b を $n^2=ab$（ただし $a<b$）を満たす n^2 の約数とすると x，y は $x=\dfrac{n+a}{m}$，$y=\dfrac{n+b}{m}$ とおける。a，b は n^2 の約数であるから，$n+a$ が m で割り切れるときに，x，y が自然数になる。

特に n が素数の場合は，$a=1$，$b=n^2$ だけなので，$n+1$ が m で割り切れる場合のみ2つの単位分数の和に分解できる。例えば $\varphi_2\left(\dfrac{6}{17}\right)=1$，$\varphi_2\left(\dfrac{5}{17}\right)=0$ である。

一般の場合は，n より小さい n^2 のすべての約数 a に対して，$n+a$ が m で割り切れるかを調べればよい。

例えば $\dfrac{8}{15}$ の場合，分母 $15=3\cdot 5$ であるから，15^2 の約数のうち15より小さいものは，順に1，3，5，9

したがって $15+1$，$15+3$，$15+5$，$15+9$ の4数が8で割り切れるかを調べればよい。順に2，$\dfrac{9}{4}$，$\dfrac{5}{2}$，3となるから自然数になるのは2数のみ。

よって $\varphi_2\left(\dfrac{8}{15}\right)=2$

また，$x=2$，3 であるから $\dfrac{8}{15}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{30}$，あるいは $\dfrac{8}{15}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$ と表される。

§5. §4の補足

$\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ であるから $\dfrac{5}{6}$ を超える真分数は2つの単位分数の和に分解できない。

（東京都立三田高等学校）