漸近線の求め方に関する考察

玉井　克樹（たまい　かつき）

§1. 漸近線についての生徒からの質問

数学において図を使って直感的な説明を与えることは，理解を深めるのに大いに役立つ。しかし，解析学の分野では，無限の取り扱いなど，非常に神経を使う部分がある。

数学Ⅲの参考書(〔1〕など)で，曲線 $y=f(x)$ の漸近線を見つけるときには，「$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}=b$ となるとき，$y=ax+b$ が漸近線となる。」といった記述をよくみる。この $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ の代わりに，接線の傾きの極限を考えて $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=a$ としてもよいかという質問が生徒からあった。確かに $f(x)$ が微分可能な関数であれば，直感的には正しそうである(図 1 参照)。はたして，これは正しいのであろうか。

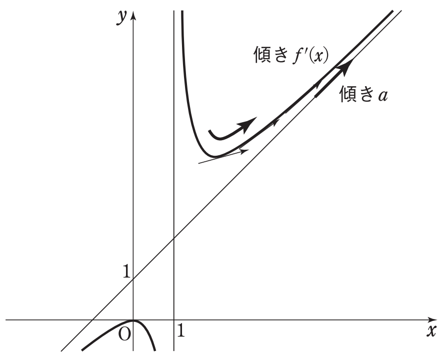

図 1　関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ のグラフとその漸近線

§2. 漸近線の定義

この質問に答えるためには，まず漸近線の定義を確認する必要がある。教科書には，漸近線の定義はあまり正確に記述されていない。

岩波数学入門辞典(〔3〕)によると，

> 無限に遠くまで延びている平面曲線 C に対し，曲線上の点が無限遠に遠ざかっていくとき，その点からの距離が限りなく 0 に近づく直線があれば，この直線を曲線 C に対する**漸近線**という。
>
> 正確には次のように定義する。曲線 C が媒介変数表示 $x=x(t)$，$y=y(t)$ により与えられ，$x(t)^2+y(t)^2\to\infty\,(t\to\infty)$ とする。
>
> $$\lim_{t\to\infty}(ax(t)+by(t)+c)=0$$
>
> となる a，b，c が存在するとき，直線 $ax+by+c=0$ を C の漸近線という。

とある。

上の説明に少し付け加える。曲線 C 上の遠ざかる点を P，P から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線を PH とする。このとき，P が無限遠に遠ざかっていくことは，適当な媒介変数 t を用意し，$\mathrm{P}(x(t),\,y(t))$ とおくと，$\mathrm{OP}^2=x(t)^2+y(t)^2\to\infty\ (t\to\infty)$ と表すことができる。ここの $t\to\infty$ は本質的ではない。$t\to-\infty$ でも，$t\to+0$ でも何でも構わない。また，曲線と言えば，関数 $x(t)$，$y(t)$ の連続性くらいは通常だと仮定する。P から直線までの距離が限りなく 0 に近づくことは，点と直線の距離の公式より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\mathrm{PH}=\lim_{t\to\infty}\frac{|ax(t)+by(t)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$，すなわち，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\{ax(t)+by(t)+c\}=0$ と表すことができる。

漸近線を「曲線が，限りなく近づくが，決して交わることのない直線」と定義していないことに注意しておきたい。**曲線が漸近線と交わることは許される**。直線も曲線の一部であると考えれば，直線はそれ自身が漸近線であると考えることもできるが，それは除くことにするのが一般的であろう。

さて，一般の曲線の場合に漸近線の定義を確認したが，関数 $y=f(x)$ のグラフに限ると，この定義はどのように言い換えることができるのだろうか。

曲線 $y=f(x)$ は x を媒介変数とする自然な媒介変数表示 $x=x$, $y=f(x)$ をもつので，これを利用して説明する。以下，$f(x)$ は定義域で連続であると仮定する。

例えば，直線 $x=c$ が曲線 $y=f(x)$ の漸近線になるとする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ が直線 $x=c$ に近づくことから，$x\to c+0$ または $x\to c-0$ と考える。点Pが無限遠に遠ざかることから，$\mathrm{OP}^2=x^2+f(x)^2\to\infty$ が成り立つので，これらを合わせると，

$$\lim_{x\to c+0}f(x)=\pm\infty \text{ または } \lim_{x\to c-0}f(x)=\pm\infty \quad \cdots①$$

を得る。

次に，直線 $y=ax+b$ が曲線 $y=f(x)$ の漸近線になるとする。このときは，媒介変数は $x\to\infty$ または $x\to-\infty$ と考える。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ が直線 $y-ax-b=0$ に近づくことは $f(x)-ax-b\to 0$ と表すことができるので，

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad \cdots②$$

を得る。

この①や②が高校の数学Ⅲの教科書(〔2〕など)や参考書に載っている式である。

§3. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ と $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}=b$ で漸近線が見つけられることの説明

参考書によく載っている方から説明する。

$x\to\infty$ としても $x\to-\infty$ としても議論は同じなので，以下，$x\to\infty$ について考える。

> **命題1**　c を定数とし，$f(x)$ を区間 $(c,\ \infty)$ で定義される連続関数とする。直線 $y=ax+b$ が関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\to\infty$ における漸近線であるならば，次が成り立つ。
>
> $$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a & \cdots③\\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b & \cdots④\end{cases}$$

証明　漸近線の性質②より，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ が成り立つ。

よって，④が成り立つ。④より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax}{x}=0$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}-a\right\}=0$ となり，③は成り立つ。　■

命題1により，関数 $y=f(x)$ のグラフが $x\to\infty$ における漸近線をもつ場合，それを求めたければ③，④を満たす実数 a，b を計算すればよいことになる。

例えば，関数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ のように，式の形から $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x+1)\}=0$ と一目で漸近線が求められるときは，公式③，④に頼る必要もない。しかし，関数 $y=x+\sqrt{x^2+2x+3}$ のように，式を見ただけではそのグラフに漸近線が存在するかどうかがわかりづらい関数に対しては，この命題1は(極限の計算さえできれば)確実に漸近線を求められる方法になっているので，非常に便利である。

また，命題1の対偶をとると，③，④を満たす a，b のいずれかが存在しないならば，関数 $y=f(x)$ のグラフには $x\to\infty$ における漸近線は存在しないということになる。例えば，$f(x)=x^2$ とすると，③の極限値が存在しないので，放物線 $y=x^2$ には $x\to\infty$ における漸近線は存在しないことになる。

§4. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ を $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=a$ におきかえることは可能か

では，本題に移る。はじめの生徒の質問を正確に書くと次のようになる。ここでも，$x\to\infty$ についてのみ考える。

> **問題1**　c を定数とし，$f(x)$ を区間 $(c,\ \infty)$ で定義される微分可能な関数とする。直線 $y=ax+b$ が関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\to\infty$ における漸近線であるならば，次が成り立つか。
>
> $$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=a & \cdots③'\\ \displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b & \cdots④\end{cases}$$

実は，この問題に対しては，次のような反例をあげることができる。高校生でも容易に確認できる例である。

解答　正しくない。

(反例)　$f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$ $(x>0)$ とおく。

三角関数の性質より，$-1\leqq\sin x^2\leqq 1$

よって，$-\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{\sin x^2}{x}\leqq\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるので，はさみうち

の原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x}=0$ …⑤

したがって，直線 $y=0$ は曲線 $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$ の漸近線である。すなわち，$a=b=0$ となる。

しかし，

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x^2}{x}\right)'=\frac{\cos x^2\cdot 2x\cdot x-\sin x^2\cdot 1}{x^2}$$

$$=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$$

となり，⑤より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x^2}{x}=0$ がいえるが，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos x^2$ は存在しないので，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ は存在しない。すなわち，③′ は成り立たない。 ■

この反例では，x を大きくするにつれて，グラフ上の点は x 軸に近づいていくので，漸近線の定義より，x 軸が漸近線となる。しかし，$y=f(x)$ の接線の傾きは 0 に近づくことはなく，およそ -2 と 2 の間の値を行ったり来たりする(図 2 参照)。

この例からも分かるように，**漸近線が「接線の極限」であるというのは誤解である**ので注意しておきたい。

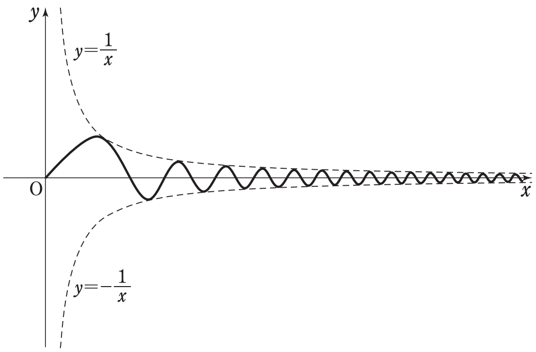

図 2　関数 $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$ $(x>0)$ のグラフ

今回挙げた反例は，曲線 $y=f(x)$ が漸近線と無限回交わる。曲線が漸近線と交わることは許されているので，これで解答としては十分であるが，この関数 $f(x)$ に $\dfrac{2}{x}$ を加えると，漸近線と 1 回も交わらない例を構成することもできる(図 3 参照)。

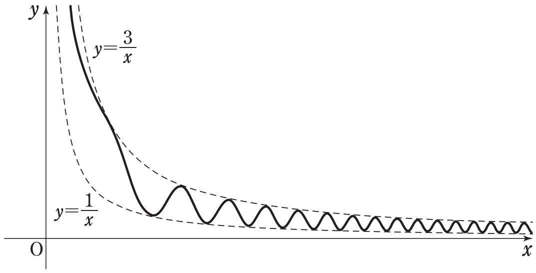

図 3　関数 $y=\dfrac{\sin x^2+2}{x}$ $(x>0)$ のグラフ

§5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ の収束を仮定するとき

極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ が漸近線の傾きと無関係にも思えないので，もう少し調べてみた。すると，問題 1 において $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ の収束を仮定すれば，③′ と④が成り立つことが分かった。以下，このことを証明する。

> **補題 1**　$f(x)$ を区間 $(c,\ \infty)$ で微分可能な関数とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ と極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$ が存在するとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ が成り立つ。

証明　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\beta$ とおく。

$t>c$ とすると，平均値の定理より，

$$\frac{f(t+1)-f(t)}{(t+1)-t}=f'(s_t)\ \cdots⑥,$$

$$t<s_t<t+1\ \cdots⑦$$

を満たす実数 s_t が存在する。

⑦より，$t\to\infty$ のとき $s_t\to\infty$ である。

よって，⑥の両辺で $t\to\infty$ とすると，仮定より，

左辺は $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t+1)-f(t)}{(t+1)-t}=\frac{\alpha-\alpha}{1}=0$ となり，

右辺は $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f'(s_t)=\beta$ となる。

以上より，$\beta=0$ となるので，題意は示された。

■

この補題は「無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$」になるという定理の類似である。

($f(x)$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$f'(x)$ が a_n に対応する。)

命題 2　c を定数とし，$f(x)$ を区間 $(c,\ \infty)$ で定義される微分可能な関数で，さらに，極限値 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が存在すると仮定する。直線 $y=ax+b$ が関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\to\infty$ における漸近線であるならば，次が成り立つ。

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f'(x)=a & \cdots ③' \\ \lim_{x\to\infty}\{f(x)-ax\}=b & \cdots ④ \end{cases}$$

証明　漸近線の性質②

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$$

が成り立つので，④が成り立つ。②の関数を微分すると，$\{f(x)-(ax+b)\}'=f'(x)-a$ となる。ここで，仮定より，極限値 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が存在するので，極限値 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}'$ も存在する。よって，②の関数 $f(x)-(ax+b)$ に対して補題1が使えて，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-(ax+b)\}'=0$$

が成り立つ。すなわち，$\lim_{x\to\infty}\{f'(x)-a\}=0$ となるため，③′ が成り立つ。　■

§6. 補足

生徒の質問に対しては，これで十分説明ができたと思うが，最後にいくつか注意点を補足しておく。

（注 1）　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ が収束しても，$\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が収束するとは限らない。つまり，一般に等式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f'(x)$$

は成り立たない。

$\left(\text{例}\quad f(x)=\sin x \text{ や，問題1の } f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}\right)$

一見，ロピタルの定理を使えば成り立つようにも思えるが，左辺が不定形$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$とは限らないので，ロピタルの定理は使えない。

（注 2）　極限値 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が存在すると仮定すると，等式 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f'(x)$ は成り立つ。より正確に述べると，次の命題が成り立つ。（証明は高校レベルを超える。）

命題 3　c を定数とし，$f(x)$ を区間 $(c,\ \infty)$ で定義される微分可能な関数で，極限値 $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が存在するとする。このとき，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ も収束し，等式 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が成り立つ。

証明　$\varepsilon-N$ 論法を用いて示す。

$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\beta$，$g(x)=f(x)-\beta x$ とおく。

$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\lim_{x\to\infty}\{f'(x)-\beta\}=0$ であるので，任意の $\varepsilon>0$ に対し，c より大きいある正の実数Nが存在し，

「$x>N \Longrightarrow |g'(x)|<\varepsilon$」

が成り立つ。

このとき，$x>N$ とすると，

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\beta\right|=\left|\frac{g(x)}{x}\right| \leqq \left|\frac{g(x)-g(N)}{x}\right|+\left|\frac{g(N)}{x}\right| =\frac{|g(x)-g(N)|}{x}+\frac{|g(N)|}{x}$$

平均値の定理より，

$$\frac{g(x)-g(N)}{x-N}=g'(s),\quad N<s<x$$

を満たす実数 s が存在する。

よって，$\left|\dfrac{g(x)-g(N)}{x-N}\right|=|g'(s)|<\varepsilon$

$$\therefore\quad |g(x)-g(N)|<(x-N)\varepsilon$$

したがって，

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\beta\right|<\frac{(x-N)\varepsilon}{x}+\frac{|g(N)|}{x} <\varepsilon+\frac{|g(N)|}{x}\quad (\because\quad N>0)$$

ここで，$x>\max\left\{N,\ \dfrac{|g(N)|}{\varepsilon}\right\}$ とすると，

$\dfrac{|g(N)|}{x}<\varepsilon$ であるので，

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\beta\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

が成り立つ。

ε は任意より，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$ が成り立つ。

よって，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が成り立つ。

■

命題1と命題3を合わせれば，命題2の別証明になる。ちなみに，この命題3は

$$「\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=\alpha」$$

の類似である。

$\left(f'(x)\right.$ が a_n，$\dfrac{f(x)}{x}$ が $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ に対応する。$\left.\right)$

(注3) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}f'(x)$ が成り立ったとしても，関数 $y=f(x)$ のグラフに $x\to\infty$ における漸近線が存在するとは限らない。

(例　$f(x)=\sqrt{x}$ や，$f(x)=\log x$)

つまり，③や③′を満たす実数 a だけ存在しても，④を満たす実数 b が存在しないならば，漸近線は存在しない。

$f(x)$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)$	$x\to\infty$ における漸近線
$\dfrac{x^2}{x-1}$	収束	収束	存在する
$\dfrac{\sin x^2}{x}$	収束	発散	存在する
$\sqrt{x}$	収束	収束	存在しない
$\sin x$	収束	発散	存在しない
x^2	発散	発散	存在しない

表1　5つのパターン

《参考文献》

〔1〕　チャート式　基礎からの数学Ⅲ　数研出版

〔2〕　教科書　高等学校　数学Ⅲ　数研出版

〔3〕　岩波数学入門辞典　岩波書店

（京都府　東山高等学校）