$\sin A+\sin B+\sin C$ から見えるもの

鈴木(すずき) 崇裕(たかひろ)

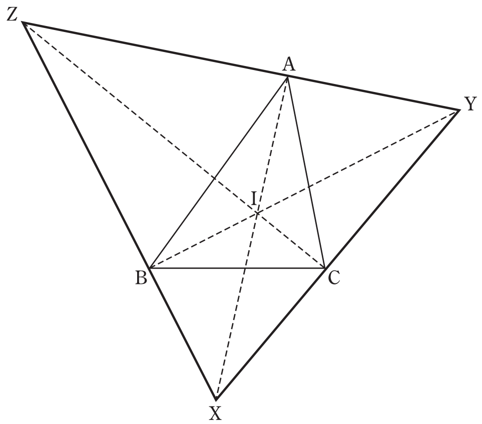
§0. はじめに

三角比や三角関数の授業で $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ などの証明問題を扱うとき，公式の確認や式の変形に終始してしまい素気なさを感じていた。三角関数で表された式ならば，何か図形とつながるのではないかと思い，三角形と関連付けて考察した。

§1. $\sin A+\sin B+\sin C$ の広がり

△ABC において，a=BC，b=CA，c=AB とし，以下 △DEF 等においても同様とする。また，△ABC の垂心を H，内心を I，内接円の半径を r，外接円の半径を R とする。

定義 1.1（傍心三角形）
△ABC における 3 つの傍心に対して，∠A の内角の二等分線上の傍心（∠A 内の傍接円の中心）を X，∠B の内角の二等分線上の傍心を Y，∠C の内角の二等分線上の傍心を Z とする。このとき，△XYZ を △ABC の**傍心三角形**と呼ぶこととする。



定理 1.2　I は傍心三角形 XYZ の垂心である。

証明　3 直線 AX，BY，CZ は，△ABC の内心 I で 1 点で交わっている。
直線 BX は ∠B の外角の二等分線より，
∠CBX$=\frac{\pi-B}{2}$ であるから，

$$\angle \mathrm{YBX}=\angle \mathrm{YBC}+\angle \mathrm{CBX}=\frac{B}{2}+\frac{\pi-B}{2}=\frac{\pi}{2}$$

よって，I は △XYZ の垂心である。 終

補題 1.3　△ABC において，次の等式が成り立つ。

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\sin X\sin Y\sin Z$$

証明　∠CBX$=\frac{\pi-B}{2}$，∠BCX$=\frac{\pi-C}{2}$ なので，
△BXC に着目して，

$$X=\pi-\left(\frac{\pi-B}{2}+\frac{\pi-C}{2}\right)=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}$$

である。他も同様に，

$$Y=\frac{C+A}{2}=\frac{\pi-B}{2},\quad Z=\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}$$

$$\begin{aligned}&\sin X\sin Y\sin Z\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\\&=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}&\sin X\sin Y\sin Z\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\sin\frac{A+B}{2}\\&=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\sin\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\sin(A+B)+\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\{\sin(\pi-C)+\sin A+\sin B\}$$

$$=\frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

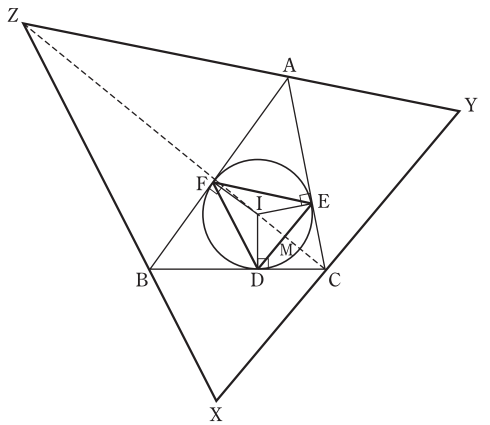
以上より，

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=4\sin X\sin Y\sin Z$$ 終

補題 1.4　△ABC の内接円と辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする。このとき，次の関係が成り立つ。

△DEF∽△XYZ



証明　DE と CI の交点をMとする。

△CDM と △CEM において，CD＝CE (接線の長さ)，CM は共通，$\angle\mathrm{DCM}=\angle\mathrm{ECM}=\dfrac{C}{2}$ より，

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

△CDM≡△CEM

対応する角は等しいから，∠CMD＝∠CME

よって

$\angle\mathrm{CME}=\dfrac{\pi}{2}$　……①

(換言すれば，CD＝CE，ID＝IE＝r より，IC は線分 DE の垂直二等分線である。)

また，定理 1.2 より，I は △XYZ の垂心であるから，$\angle\mathrm{ZCX}=\dfrac{\pi}{2}$　……②

①，②より，錯角が等しいので，DE∥XY である。

他も同様に，EF∥YZ，FD∥ZX

ゆえに，直線 DE，DF のなす角と直線 XY，XZ のなす角は等しく　$D=X$

同様に，$E=Y$，$F=Z$ なので，

△DEF∽△XYZ　終

定理 1.5　△ABC，△DEF において，次の等式が成り立つ。

$$\frac{R}{r^3}=\frac{a+b+c}{def}$$

証明　補題 1.4 より，$X=D$，$Y=E$，$Z=F$

よって，補題 1.3 から

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin X\sin Y\sin Z$$
$$=4\sin D\sin E\sin F$$

ここで，△ABC の外接円の半径は R，△DEF の外接円の半径は r であるから，正弦定理より

$$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=4\cdot\frac{d}{2r}\cdot\frac{e}{2r}\cdot\frac{f}{2r}$$

$$\frac{a+b+c}{2R}=\frac{def}{2r^3}$$

$$\frac{R}{r^3}=\frac{a+b+c}{def}$$ 終

補題 1.6　△ABC の面積を S とする。

$$R=\frac{abc}{4S},\ a+b+c=\frac{abc}{2rR}$$

証明　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ から，$\sin A=\dfrac{2S}{bc}$

正弦定理より，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ だから，$\dfrac{a}{2R}=\dfrac{2S}{bc}$

となり，$R=\dfrac{abc}{4S}$ が成り立つ。

さらに，$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ より，

$\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ となり，$a+b+c=\dfrac{abc}{2rR}$

である。　終

定理 1.7　△ABC，△DEF において，次の等式が成り立つ。

$$\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{abc}{def}}$$

証明　定理 1.5，補題 1.6 より

$$\frac{R}{r^3}=\frac{a+b+c}{def}$$

$$\frac{R}{r^3}=\frac{1}{def}\cdot\frac{abc}{2rR}$$

$$\frac{R^2}{r^2}=\frac{abc}{2def}$$

$R>0$, $r>0$ より

$$\frac{R}{r}=\sqrt{\frac{abc}{2def}}$$

終

§2. $a\cos A+b\cos B+c\cos C$ と垂足三角形

補題 2.1　△ABC において，次の等式が成り立つ。

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

証明　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$
$$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$$
$$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos(\pi-A-B)\}$$
$$=2\sin C\cdot 2\cos\frac{\pi-2B}{2}\cos\frac{2A-\pi}{2}$$
$$=4\sin C\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=4\sin A\sin B\sin C$$

終

補題 2.2　△ABC において，次の等式が成り立つ。

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{8S^2}{abc}$$

証明　正弦定理より，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ であるから，

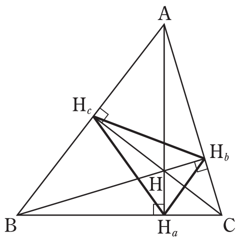
$$a\cos A+b\cos B+c\cos C$$
$$=2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C$$
$$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$
$$=4R\sin A\sin B\sin C \quad (\because 補題 2.1)$$
$$=4R\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$$
$$=\frac{abc}{2R^2}$$
$$=\frac{abc}{2}\left(\frac{4S}{abc}\right)^2 \quad (\because 補題 1.6)$$
$$=\frac{8S^2}{abc}$$

終

定義 2.3（垂足三角形）

△ABC は鋭角三角形とし，A，B，C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ H_a，H_b，H_c とする。

$\triangle\mathrm{H}_a\mathrm{H}_b\mathrm{H}_c$ を △ABC の**垂足三角形**と呼ぶこととする。



補題 2.4　以下，△ABC は鋭角三角形であるとする。H は垂足三角形 $\mathrm{H}_a\mathrm{H}_b\mathrm{H}_c$ の内心である。

証明　H は △ABC の垂心より，AH_a，BH_b，CH_c は 1 点で交わっている。$\angle\mathrm{BH}_c\mathrm{C}=\angle\mathrm{BH}_b\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$ なので，円周角の定理の逆から，4 点 B，C，H_b，H_c は同一円周上にある。円周角の定理より，

$\angle\mathrm{H}_b\mathrm{H}_c\mathrm{C}=\angle\mathrm{H}_b\mathrm{BC}$　……①

また，$\angle\mathrm{BH}_c\mathrm{H}+\angle\mathrm{BH}_a\mathrm{H}=\pi$ であるから，4 点 B，H_a，H，H_c は同一円周上にある。円周角の定理より，

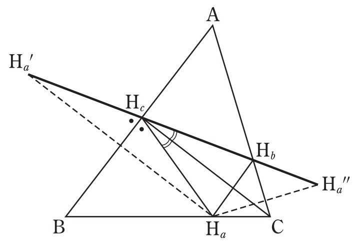
$\angle\mathrm{H}_a\mathrm{BH}=\angle\mathrm{H}_a\mathrm{H}_c\mathrm{H}$　……②

$\angle\mathrm{H}_b\mathrm{BC}$ と $\angle\mathrm{H}_a\mathrm{BH}$ は同じ角なので①，②から，

$\angle\mathrm{H}_a\mathrm{H}_c\mathrm{H}=\angle\mathrm{H}_b\mathrm{H}_c\mathrm{C}$

ゆえに，H は $\triangle\mathrm{H}_a\mathrm{H}_b\mathrm{H}_c$ の内心である。　終

補題 2.5　直線 AB，AC に関して，点 H_a と対称な点をそれぞれ H_a'，H_a'' とする。4 点 H_a'，H_c，H_b，H_a'' は，この順に同一直線上にある。



証明　まず，3 点 H_a'，H_c，H_b が同一直線上にあることを示す。

H_a と H_a' は AB に関して対称な点だから，

$\angle\mathrm{H}_a'\mathrm{H}_c\mathrm{B}=\angle\mathrm{BH}_c\mathrm{H}_a$

補題 2.4 より，$\angle\mathrm{H}_a\mathrm{H}_c\mathrm{C}=\angle\mathrm{CH}_c\mathrm{H}_b$

CH_c は AB の垂線だから $\angle CH_cB=\dfrac{\pi}{2}$。よって,

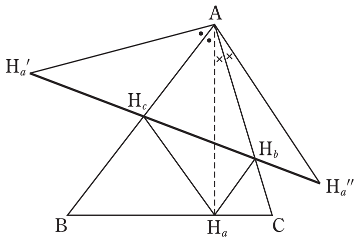
$$\begin{aligned}&\angle H_a'H_cB+\angle BH_cH_a+\angle H_aH_cC+\angle CH_cH_b\\&=2\angle BH_cH_a+2\angle H_aH_cC\\&=2\angle CH_cB\\&=\pi\end{aligned}$$

ゆえに,3 点 H_a',H_c,H_b は同一直線上にある。次に,3 点 H_a',H_c,H_b がこの順にあることを示す。2 点 H_a,H_b は直線 AB に関して同じ側にあり,H_a' は AB に関して H_a と対称な点であるから,H_a' は AB に関して H_b の反対側となる。さらに,H_c は AB 上の点より,3 点 H_a',H_c,H_b はこの順にある。

以上より,3 点 H_a',H_c,H_b はこの順に同一直線上にある。同様に,3 点 H_c,H_b,H_a'' もこの順に同一直線上にあることが言えるので,4 点 H_a',H_c,H_b,H_a'' は,この順に同一直線上にある。 終

補題 2.6

$AH_a'=AH_a''=AH_a$,$\angle H_a'AH_a''=2A$



証明 H_a',H_a'' の定義より,$AH_a=AH_a'=AH_a''$ は明らか。

また,$\angle H_aAB=\angle BAH_a'$,$\angle H_aAC=\angle CAH_a''$ であるから

$$\begin{aligned}\angle H_a'AH_a''&=\angle H_a'AH_a+\angle H_aAH_a''\\&=2\angle BAH_a+2\angle H_aAC\\&=2A\end{aligned}$$

終

補題 2.7 $H_a'H_a''=\dfrac{8S^2}{abc}$

証明 $\triangle AH_a'H_a''$ において余弦定理から

$$\begin{aligned}(H_a'H_a'')^2&=(AH_a')^2+(AH_a'')^2\\&\quad-2AH_a'\cdot AH_a''\cos\angle H_a'AH_a''\\&=AH_a^2+AH_a^2-2AH_a^2\cos 2A\\&\qquad\qquad(\because \text{補題 }2.6)\\&=2AH_a^2(1-\cos 2A)\\&=4AH_a^2\sin^2 A\end{aligned}$$

$AH_a>0$,$\sin A>0$ より

$$H_a'H_a''=2AH_a\sin A$$

ここで,$S=\dfrac{1}{2}BC\cdot AH_a$ より,$AH_a=\dfrac{2S}{a}$

また,$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ より,$\sin A=\dfrac{2S}{bc}$

これらを代入して

$$H_a'H_a''=2\cdot\frac{2S}{a}\cdot\frac{2S}{bc}=\frac{8S^2}{abc}$$

終

定理 2.8

$a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$=(\triangle H_aH_bH_c$ の周の長さ)

証明 補題 2.2,2.7 より

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=H_a'H_a''$$

H_a',H_a'' はそれぞれ直線 H_cB,H_bC に関して点 H_a と対称な点だから,$H_cH_a'=H_cH_a$,

$H_bH_a''=H_bH_a$

$$\begin{aligned}H_a'H_a''&=H_a'H_c+H_cH_b+H_bH_a''\\&=H_aH_c+H_cH_b+H_bH_a\end{aligned}$$

したがって,

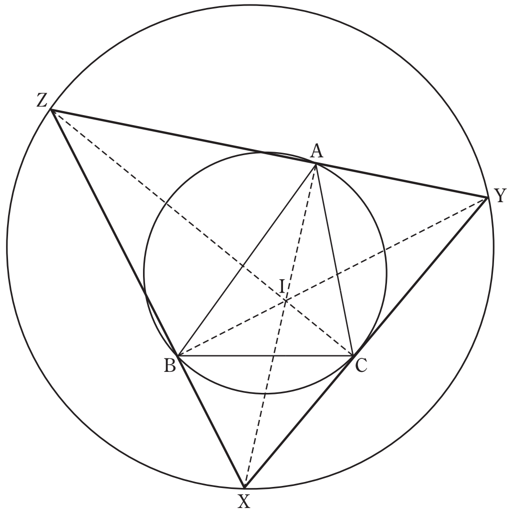
$a\cos A+b\cos B+c\cos C=H_aH_b+H_bH_c+H_cH_a$

つまり,$a\cos A+b\cos B+c\cos C$ の値は垂足三角形 $H_aH_bH_c$ の周の長さに等しい。 終

§3. 傍心三角形 XYZ と △ABC,△DEF

定理 3.1 △ABC,△XYZ の外接円の半径をそれぞれ R,L としたとき,次の等式が成り立つ。

$$L=2R$$



証明 定理1.2より，Ｉは△XYZの垂心だから，△ABCは△XYZの垂足三角形である。また，$0<A,\ B,\ C<\dfrac{\pi}{2}$ で，補題1.3から $X=\dfrac{\pi-A}{2}$，$Y=\dfrac{\pi-B}{2}$，$Z=\dfrac{\pi-C}{2}$ なので，X，Y，Z はともに鋭角である。よって，△XYZにおいて，定理2.8を用いると

$$x\cos X+y\cos Y+z\cos Z=a+b+c \quad \cdots\cdots\cdots(☆)$$

左辺に着目すると，△XYZの外接円の半径は L より，正弦定理から，$x=2L\sin X$，$y=2L\sin Y$，$z=2L\sin Z$ である。ゆえに

(☆)の左辺

$$\begin{aligned}&=2L\sin X\cos X+2L\sin Y\cos Y+2L\sin Z\cos Z\\&=L\sin 2X+L\sin 2Y+L\sin 2Z\\&=L\sin(\pi-A)+L\sin(\pi-B)+L\sin(\pi-C)\\&=L(\sin A+\sin B+\sin C)\end{aligned}$$

一方で右辺は，△ABCにおいて正弦定理より

$$\begin{aligned}a+b+c&=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C\\&=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\end{aligned}$$

したがって，等式(☆)をおき換えると

$$\begin{aligned}L(\sin A+\sin B+\sin C)&=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\\L&=2R\end{aligned}$$

終

> **系3.2** △DEFと△XYZの相似比は
> $$r:2R=\sqrt{def}:\sqrt{2abc}$$

証明 補題1.4より△DEF∽△XYZで，相似比は外接円の半径の比と等しく $r:L=r:2R$ である。定理1.7より

$$r:2R=r:2\cdot\sqrt{\frac{abc}{2def}}\,r=\sqrt{def}:\sqrt{2abc}$$

終

> **系3.3**
> $$x=4R\cos\frac{A}{2},\ y=4R\cos\frac{B}{2},\ z=4R\cos\frac{C}{2}$$
> $$d=2r\cos\frac{A}{2},\ e=2r\cos\frac{B}{2},\ f=2r\cos\frac{C}{2}$$

証明 △XYZで正弦定理を用いると，$X=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$，

定理3.1から $\dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)}=2L=4R$

$$x=4R\cos\frac{A}{2}$$

系3.2より，

$$\begin{aligned}d&=\frac{r}{2R}\cdot 4R\cos\frac{A}{2}\\&=2r\cos\frac{A}{2}\end{aligned}$$

つまり，$R=\dfrac{a}{2\sin A}$，$r=\dfrac{2S}{a+b+c}=\dfrac{bc\sin A}{a+b+c}$ などから，x，d は△ABCの辺と角だけで表現できる。y，z，e，f も同様に示せる。 **終**

> **定理3.4** △XYZ$=R(a+b+c)$

証明 系3.3より，$X=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$，$y=4R\cos\dfrac{B}{2}$，$z=4R\cos\dfrac{C}{2}$ から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{XYZ}&=\frac{1}{2}yz\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot 4R\cos\frac{B}{2}\cdot 4R\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\\&=2R^2\left(4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\\&=2R^2(\sin A+\sin B+\sin C)\quad(\because\text{補題}1.3)\\&=R(a+b+c)\end{aligned}$$

終

> **系3.5** △ABCと△XYZの面積比は $r:2R$

証明 △ABC：△XYZ

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}r(a+b+c):R(a+b+c)\\&=r:2R\end{aligned}$$

終

《参考文献》

なぜ初等幾何は美しいか－三角形幾何学－
Yvonne Sortais，Rene Sortais 著　戸田アレクシ哲訳　東京出版

（静岡県　静岡雙葉高等学校・中学校）