放物線に内接する正三角形

伊藤（いとう）　眞澄（ますみ）

§1．はじめに

2004 年度東大前期1に，放物線 $y=x^2$ に内接する正三角形の問題が出題された。そこでは 1 辺の傾きから 1 辺の長さを求めさせているが，3 つの頂点の座標は問われていない。そこで一般に放物線 $y=x^2$ に正三角形が内接しているとき，3 つの頂点の座標がどうなるのかについて調べてみた。

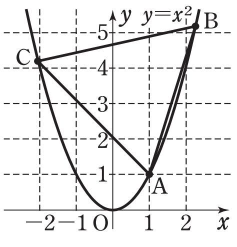
§2．わかったこと

(1)　1 つの辺の傾きを与えれば，3 つの頂点の座標をすべてその傾きで表すことができる。

(2)　1 つの頂点の座標を与え，そこから他の 2 つの頂点の座標を求めるには，一般的には 3 次方程式の解法(いわゆるカルダーノの方法)が必要となる。以下でその概略を述べる。

【(1)について】

3 点を図のようにおき，$A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$，$C(c,\ c^2)$ とおく。このとき，直線 AB と x 軸の正方向のなす角を θ_{AB}，AB の傾きを m_{AB} などと表せば，



$$m_{AB}=\tan\theta_{AB}$$

$$m_{AB}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$$

$$\angle CAB=\theta_{CA}-\theta_{AB}=\frac{\pi}{3}$$

および tan の加法定理より

$$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\tan\theta_{CA}-\tan\theta_{AB}}{1+\tan\theta_{CA}\tan\theta_{AB}}=\frac{c-b}{1+(c+a)(a+b)}$$

$\therefore\quad c-b=\sqrt{3}\{1+(c+a)(a+b)\}$ …①　同様に

$a-c=\sqrt{3}\{1+(a+b)(b+c)\}$ …②

$b-a=\sqrt{3}\{1+(b+c)(c+a)\}$ …③

ここで BC の傾きを $b+c=t$ とおくと，

②＋③より　$b-c=\sqrt{3}(t^2+2at+2)$ …④

③－②より　$t-2a=\sqrt{3}(c-b)t$ …⑤

④，⑤より　$t-2a=-3(t^2+2at+2)t$

$\therefore\quad 3t^3+7t=2a(1-3t^2)$ …⑥

$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のときは⑥は $\pm\dfrac{8\sqrt{3}}{3}=0$ となり矛盾するから，$t\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ としてよく，$a=\dfrac{3t^3+7t}{2(1-3t^2)}$ …⑦

⑤を $t-2a=\sqrt{3}(t-2b)t$ と変形して⑦を代入すれば　$b=\dfrac{-3t^3+2\sqrt{3}t^2+t+2\sqrt{3}}{2(1-3t^2)}$ …⑧

同様にして

$$c=\frac{-3t^3-2\sqrt{3}t^2+t-2\sqrt{3}}{2(1-3t^2)}\ \cdots⑨$$

【(2)について】

$A(1,\ 1)$ のとき，B とCの座標を求める。

$a=\dfrac{3t^3+7t}{2(1-3t^2)}=1$　　とおくと

$3t^3+6t^2+7t-2=0$ …①

これをカルダーノの方法で解けば次のようになる。

3 で割って　　$t^3+2t^2+\dfrac{7}{3}t-\dfrac{2}{3}=0$

$t=x-\dfrac{2}{3}$ とおくと　$x^3+x-\dfrac{44}{27}=0$ …②

ここで次の因数分解を利用する。

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ \cdots③$$

③で $y=-u$，$z=-v$ とおくと

$$x^3-u^3-v^3-3uvx$$
$$=(x-u-v)(x^2+u^2+v^2+xu-uv+vx)\ \cdots③'$$

この左辺と②の左辺を比べて

$x^3+x-\dfrac{44}{27}=x^3-3uvx-(u^3+v^3)$　から

$$\begin{cases}-3uv=1 & \cdots④\\ u^3+v^3=\dfrac{44}{27} & \cdots⑤\end{cases}$$

を満たす u，v を求める。

④より　$uv=-\dfrac{1}{3}$　$\therefore$　$u^3v^3=-\dfrac{1}{27}$ …④′

よって④′と⑤から u^3 と v^3 は 2 次方程式

$$s^2-\frac{44}{27}s-\frac{1}{27}=0 \quad \text{の解。}$$

$$\therefore \quad s=\frac{22}{27}\pm\sqrt{\left(\frac{22}{27}\right)^2+\frac{1}{27}}=\frac{22\pm\sqrt{511}}{27}$$

よって $u^3=\dfrac{22+\sqrt{511}}{27}$，$v^3=\dfrac{22-\sqrt{511}}{27}$

となるから，u と v の実数解として

$u=\sqrt[3]{\dfrac{22+\sqrt{511}}{27}}$，$v=\sqrt[3]{\dfrac{22-\sqrt{511}}{27}}$ をとれば，

③′より $x=u+v$ が１つの解の候補であり，実際にこの値が解になっている。

$$\therefore \quad x=\sqrt[3]{\frac{22+\sqrt{511}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{22-\sqrt{511}}{27}}$$

$t=x-\dfrac{2}{3}$ であったから

$$t=\sqrt[3]{\frac{22+\sqrt{511}}{27}}+\sqrt[3]{\frac{22-\sqrt{511}}{27}}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{22+\sqrt{511}}+\sqrt[3]{22-\sqrt{511}}-2}{3}$$

⑧，⑨に代入して

$$b=\frac{\sqrt[3]{22+\sqrt{511}}+\sqrt[3]{22-\sqrt{511}}-2(1+\sqrt{3})}{6}$$
$$-\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt[3]{22+\sqrt{511}}+\sqrt[3]{22-\sqrt{511}}-2)^2-3}\fallingdotseq 2.300$$
$$c=\frac{\sqrt[3]{22+\sqrt{511}}+\sqrt[3]{22-\sqrt{511}}-2(1-\sqrt{3})}{6}$$
$$+\frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt[3]{22+\sqrt{511}}+\sqrt[3]{22-\sqrt{511}}-2)^2-3}\fallingdotseq -2.067$$

を得る。

§3. 3頂点の例

(i) 東大の問題では $t=\sqrt{2}$ を⑦，⑧，⑨に代入すれば $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{5}\sqrt{3},\ \dfrac{79}{50}-\dfrac{3}{5}\sqrt{6}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\sqrt{3},\ \dfrac{79}{50}+\dfrac{3}{5}\sqrt{6}\right)$

$\mathrm{R}\left(-\dfrac{13}{10}\sqrt{2},\ \dfrac{169}{50}\right)$

(ii) $t=0$ のときは自明な解

$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ 3)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ 3)$

(iii) １つの頂点の座標から残りの頂点の座標を初等的に求めることが可能な例

$\mathrm{A}\left(\dfrac{4}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{16}{27}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{11}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{121}{27}\right)$，

$\mathrm{C}\left(-\dfrac{10}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{100}{27}\right)$

(iii)の場合，ＡからＢとＣを求めるには，三平方の定理だけですむ。以下で計算の概略を述べる。

計算を楽にするために初めからＢとＣの座標を $\mathrm{B}\left(\dfrac{b}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{b^2}{27}\right)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{c}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{c^2}{27}\right)$ とおくと

$$\mathrm{AB}^2=\left(\frac{b-4}{27}\right)^2\{27+(b+4)^2\} \quad \cdots⑥$$
$$\mathrm{AC}^2=\left(\frac{c-4}{27}\right)^2\{27+(c+4)^2\} \quad \cdots⑦$$
$$\mathrm{BC}^2=\left(\frac{b-c}{27}\right)^2\{27+(b+c)^2\} \quad \cdots⑧$$

⑥－⑦を $b-c\neq 0$ で割って

$$27(b+c-8)+(b+c)(b^2+c^2-32)=0 \quad \cdots⑨$$

⑥－⑧を $c-4\neq 0$ で割って

$$27(2b-c-4)+(c+4)(2b^2-c^2-16)=0 \quad \cdots⑨'$$

⑨，⑨′を c について整理し，差をとって c^3 を消去すると

$$(b-4)c^2+(3b^2-48)c+(b^3+8b^2+49b-388)=0$$

よって

$$(b-4)c^2+3(b-4)(b+4)c$$
$$+(b-4)(b^2+12b+97)=0$$

$b-4\neq 0$ で割って

$$b^2+c^2+12b+12c+3bc+97=0 \quad \cdotsア$$

また，⑨より

$$b^3+c^3+b^2c+bc^2-5b-5c-216=0 \quad \cdotsイ$$

ここで　$b+c=\alpha$，$bc=\beta$ とおくと

アより　$\alpha^2+12\alpha+\beta+97=0$

イより　$\alpha^3-2\alpha\beta-5\alpha-216=0$

β を消去して

$$3\alpha^3+24\alpha^2+189\alpha-216=0$$
$$\therefore \quad 3(\alpha-1)(\alpha^2+9\alpha+72)=0$$

$\alpha^2+9\alpha+72=0$ は実数解をもたないから $\alpha=1$ が唯一の実数解で，このとき $\beta=-110$

よって b と c は２次方程式

$$y^2-y-110=0$$

の解である。

$(y-11)(y+10)=0$ より　$y=11,\ -10$

これにより，ＢとＣの座標は

$\mathrm{B}\left(\dfrac{11}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{121}{27}\right)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{10}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{100}{27}\right)$

※この(iii)については，tan　を用いてもう少し計算が楽になる別解もあるが，割愛する。

（愛知県立刈谷北高等学校）