

tan πx = 2 のとき x は無理数か

まつした けんじ
松下 賢二

§1. はじめに

数年前にインターネットの数学質問掲示板〔1〕で表題のような質問がありました。出典等は書かれておらず同僚と考え始め同僚のH氏はすぐにエレガントな解答を思いついたのですが私はやっとのこと以下の解答が思いつきました。解いた後ずっとほっといたんですが最近整理して見つかりましたので応募したいと思い立ちました。既出のものであれば申し訳ありません。

§2. 証明

同値であるので

$\cos \pi x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ とするとき、 x は無理数であることを証明する。ただし、 $0 < \pi x < \frac{\pi}{2}$

証明)

$0 < \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ より条件を満たす実数値 x が範囲内に、ただ1つ存在する。いま、 x を有理数と仮定すると、

$x = \frac{m}{l}$ (l, m は互いに素な正の整数) とおける。

$\theta = \pi x$ とおき、場合に分けて背理法を用いて示す。

〔1〕 l が奇数のとき

ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \cos l\theta &= \cos^l \theta + {}_l C_2 \cos^{l-2} \theta \sin^2 \theta \cdot i^2 \\ &\quad + {}_l C_4 \cos^{l-4} \theta \sin^4 \theta \cdot i^4 + \dots \\ &\quad + {}_l C_{l-1} \cos \theta \sin^{l-1} \theta \cdot i^{l-1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^l + {}_l C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{l-2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot i^2 \\ &\quad + {}_l C_4 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{l-4} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 \cdot i^4 + \dots \\ &\quad + {}_l C_{l-1} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{l-1} \cdot i^{l-1} \end{aligned}$$

$\cos l\theta = \pm 1$ であることに注意し整理すると

$$\pm \sqrt{5}^l = 1 + {}_l C_2 \cdot 2^2 i^2 + {}_l C_4 \cdot 2^4 i^4 + \dots + {}_l C_{l-1} \cdot 2^{l-1} i^{l-1}$$

l は奇数であるから、左辺は無理数、右辺は有理数になり矛盾。

〔2〕 l が偶数のとき

同じく、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \cos l\theta &= \cos^l \theta + {}_l C_2 \cos^{l-2} \theta \sin^2 \theta \cdot i^2 \\ &\quad + {}_l C_4 \cos^{l-4} \theta \sin^4 \theta \cdot i^4 + \dots + \sin^l \theta \cdot i^l \\ \text{ここで、} m \text{ と } l \text{ が互いに素という仮定から} \\ \cos l\theta &= -1 \text{ となるから代入すると} \\ -1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^l + {}_l C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{l-2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot i^2 \\ &\quad + {}_l C_4 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{l-4} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 \cdot i^4 + \dots + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^l \cdot i^l \\ -\sqrt{5}^l &= 1 + {}_l C_2 \cdot 2^2 i^2 + {}_l C_4 \cdot 2^4 i^4 + \dots + 2^l i^l \\ &= 1 + 4 \left\{ -{}_l C_2 + {}_l C_4 \cdot 4 - {}_l C_6 \cdot 4^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\frac{l}{2}} 4^{\frac{l}{2}-1} \right\} \end{aligned}$$

$l=2$ のときは明らかに成り立たないから $l \geq 4$ のときについて考える。

l は偶数であるから第1辺は5の累乗であり下2桁は 25

ということは第3辺の第2項の下2桁は 26

しかし、第2項は4の倍数であるからそれはあり得ない。したがって矛盾である。

以上より x を有理数と仮定したことに間違いがある。したがって背理法より x は無理数。

§3. 結び

一般的な解法はあると思いますが高校の範囲での解法におもしろみを感じました。

参考サイト

〔1〕 <http://www2.ezbbs.net/cgi/bbs?id=>

shukoh&dd=38&p=52
(兵庫県立赤穂高等学校)