n 数の相加・相乗平均の関係の証明
～うまくおき換えて１変数の不等式にする～

西元（にしもと） 教善（のりよし）

§1. はじめに

n 数の相加・相乗平均の関係 つまり n 個の正数 a_i($i=1$, 2, …, n ; n は 2 以上の自然数)に対して，不等式 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ が成り立ち，$a_1=a_2=\cdots=a_n$ のときに限って等号が成り立つことの証明は案外面倒である。しかし，工夫をすれば比較的簡単に，高校生でも手の届く方法があることに気付いたので紹介してみたい。

それは，n 数あっても 1 変数の不等式を証明すればよいという方法で，数学Ⅲでも扱う「関数の増減を調べることによる不等式の証明」に帰着される。

§2. 2 数の相加・相乗平均の関係の証明～証明方法を理解する 1～

2 数の相加・相乗平均の関係とは，

$a>0$, $b>0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ ……① 等号は $a=b$ のとき

という不等式と等号成立条件のことである。

教科書では，

$$(左辺)-(右辺)=\cdots\cdots=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

として証明してある。

本稿での証明方法を理解するために，その方法で証明してみよう。

①の両辺を $a(>0)$ で割ると①は次のようになる。

$\dfrac{1+\dfrac{b}{a}}{2} \geqq \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ ……② 等号は $\dfrac{b}{a}=1$ のとき

ここで，$x=\dfrac{b}{a}$ とおくと，$a>0$, $b>0$ より $x>0$ であり，②は次のようになる。

$\dfrac{1+x}{2} \geqq \sqrt{x}$ $(x>0)$ ……③

等号は $x=1$ のとき

①$\Longleftrightarrow$②$\Longleftrightarrow$③であるから，③を証明すれば①を証明したことになる。

【③の証明】

$f(x)=\dfrac{1+x}{2}-\sqrt{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

よって，$f(x)$ $(x>0)$ の増減は次のようになる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

増減表より，$f(x)$ $(x>0)$ の最小値は 0 ($x=1$ のとき) よって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$ 等号は $x=1$ のとき したがって，不等式③が成り立つ。

これで証明方法がわかったと思うが，もう 1 つ重要なポイントがある(2 数の場合は出て来ない)ので，それが実感される 3 数の相加・相乗平均の関係の証明も行っておくことにする。

§3. 3 数の相加・相乗平均の関係の証明～証明方法を理解する 2～

§2 で，$a(>0)$ で不等式の両辺を割って，a が 1, b が $\dfrac{b}{a}$ となり，その $\dfrac{b}{a}$ を x におき換えること(これが 1 つ目のポイント)で 2 数の相加・相乗平均の関係の証明が 1 変数 x の不等式，さらには 1 変数 x の関数 $f(x)$ の増減を調べ，その最小値が 0 であることとそのときの x の値が 1 になることを示すことに帰着された訳である。

実はもう 1 つのポイントがある。これについては 3 数の相加・相乗平均の関係を証明する中で言及することにする。

3 数の相加・相乗平均の関係とは，

$a>0$, $b>0$, $c>0$ のとき

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \quad \cdots\cdots①$$

　等号は $a=b=c$ のとき

という不等式と等号成立条件のことである。

　教科書では扱わない発展的内容であるが，参考書では扱ってあることもある。

　この証明には，因数分解の公式(教科書では公式という扱いではないのが残念である)

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

を使って，

①の (左辺)−(右辺)

$$=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})$$
$$\times\{(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{c})^2 -\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{a}\}$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})$$
$$\times\frac{1}{2}\{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2\}$$
$$=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})$$
$$\times\{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2\}\geqq 0$$

等号は $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}$ より $a=b=c$ のとき，として証明できる。

ただし，ここではこれとは異なる方法で証明する。

　①の両辺を $a(>0)$ で割る(これは §2 と同じ)と，①は次のようになる。

$$\frac{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}} \quad \cdots\cdots②$$

　等号は $\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=1$ のとき

ここで，$s=\frac{b}{a}$，$t=\frac{c}{a}$ とおくと，

$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，$s>0$，$t>0$ であり，②は次のようになる。

$$\frac{1+s+t}{3} \geqq \sqrt[3]{st} \quad \cdots\cdots③$$

　等号は $s=t=1$ のとき

これで，3 数 a，b，c の不等式から 2 数 s，t の不等式になった。また，①$\Longleftrightarrow$②$\Longleftrightarrow$③である。

　ここで，③の左辺の $s+t$ に着目し，$s>0$，$t>0$ より 2 数の相加・相乗平均の関係を使うと

$$s+t \geqq 2\sqrt{st} \quad \cdots\cdots④ \quad \text{等号は } s=t \text{ のとき}$$

④より $\frac{1+s+t}{3} \geqq \frac{1+2\sqrt{st}}{3}$ ……⑤

等号は $s=t$ のとき

よって，$\frac{1+2\sqrt{st}}{3} \geqq \sqrt[3]{st}$ ……⑥ を示せば⑤と⑥から③が導ける。

そこで，$st=x$ とおき換える(ここが 2 つ目のポイント)と，$s>0$，$t>0$ より $x>0$ であり，⑥は

$\frac{1+2\sqrt{x}}{3} \geqq \sqrt[3]{x}$ ……⑦ となる。

よって，⑦を示せば①が証明されたことになる。

【⑦の証明】

$f(x)=\frac{1+2\sqrt{x}}{3}-\sqrt[3]{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right)$$
$$=\frac{\sqrt[6]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

よって，$f(x)$ $(x>0)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

増減表より，$f(x)$ $(x>0)$ の最小値は 0 $(x=1$ のとき$)$ よって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$　等号は $x=1$ のとき　したがって，$x>0$ のとき不等式⑦が成り立つ。

　なお，$x=1$ のとき $st=1$ であり，さらに $s=t>0$ より $s=t=1$　よって，$\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=1$

したがって，$a=b=c$ である。

§4. *n* 数の相加・相乗平均の関係の証明〜本質的には §3 での方法〜

　n 数の相加・相乗平均の関係とは，n を 2 以上の自然数とするとき

　$a_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad \cdots\cdots①$$

　　等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき

という不等式と等号成立条件のことである。

これを数学的帰納法で証明する。

[Ⅰ] $n=2$ のとき　§2で証明済みである。

[Ⅱ] $n=k\ (\geqq 2)$ のとき，①が成り立つと仮定すると，

$a_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$のとき

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\ \cdots\cdots②$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_k$ のとき

$n=k+1$ のとき，①は

$a_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1)$のとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\geqq \sqrt[k+1]{a_1a_2a_3\cdots a_{k+1}}\ \cdots\cdots③$$

等号は $a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$ のとき

③の両辺を $a_1(>0)$ で割ると，③は次のようになる。

$$\frac{1+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{a_1}}{k+1}\geqq \sqrt[k+1]{\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_1}\cdots\cdots\frac{a_{k+1}}{a_1}}\ \cdots\cdots④$$

等号は $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=\cdots=\frac{a_{k+1}}{a_1}=1$ のとき

ここで，$s_i=\frac{a_{i+1}}{a_1}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$とおくと，

$a_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k+1)$より

$s_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$で，④は次のようになる。

$$\frac{1+s_1+s_2+\cdots+s_k}{k+1}\geqq \sqrt[k+1]{s_1s_2\cdots s_k}\ \cdots\cdots⑤$$

等号は $s_1=s_2=\cdots=s_k=1$ のとき

$s_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$より②から

$$\frac{s_1+s_2+\cdots+s_k}{k}\geqq \sqrt[k]{s_1s_2\cdots s_k}\ \cdots\cdots⑥$$

等号は $s_1=s_2=\cdots=s_k$ のとき

よって，$\frac{1+k\sqrt[k]{s_1s_2\cdots s_k}}{k+1}\geqq \sqrt[k+1]{s_1s_2\cdots s_k}\ \cdots\cdots⑦$ を示せば⑥と⑦から⑤が導け，結局③が示せたことになる。

$s_1s_2\cdots s_k=x$ とおくと，$s_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$より $x>0$ であり，⑦は

$\frac{1+k\sqrt[k]{x}}{k+1}\geqq \sqrt[k+1]{x}\ \cdots\cdots⑧$ となる。

よって，⑧を示せば⑦を示したことになる。

【⑧の証明】

$f(x)=\frac{1+k\sqrt[k]{x}}{k+1}-\sqrt[k+1]{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}-\frac{1}{k+1}x^{\frac{1}{k+1}-1}\\&=\frac{1}{k+1}\left(x^{-\frac{k-1}{k}}-x^{-\frac{k}{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{k+1}x^{-\frac{k}{k+1}}\left(x^{\frac{1}{k(k+1)}}-1\right)\\&=\frac{\sqrt[k(k+1)]{x}-1}{(k+1)\sqrt[k+1]{x^k}}\end{aligned}$$

よって，$f(x)\ (x>0)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	／	↘	0	↗

増減表より，$f(x)\ (x>0)$ の最小値は $0\ (x=1$ のとき）　よって，$x>0$ のとき $f(x)\geqq 0$　等号は $x=1$ のとき

したがって，$x>0$ のとき不等式⑧が成り立つ。

なお，$x=1$ のとき $s_1s_2\cdots s_k=1$ であり，さらに $s_1=s_2=\cdots=s_k>0$ より $s_1=s_2=\cdots=s_k=1$ である。

よって，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_1}=\cdots=\frac{a_{k+1}}{a_1}=1$

したがって，$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$ である。

以上から，②を仮定すると③が成り立つ。

つまり，$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも①が成り立つ。

[Ⅰ][Ⅱ]より，2以上のすべての自然数nに対して①が成り立つ。

§5. まとめ

本稿のポイントは複数個ある文字（正数）をどのように減らして扱いやすい形に持ち込むかということに答えた工夫である。n数の相加・相乗平均の関係の証明について私自身にとってもわかりやすい証明を考えているときにこの方法を思いついた。

2数，3数の相加・相乗平均の関係の証明として，数学Ⅲを履修した生徒に紹介するとよいだろうし，進んだ生徒にはn数の相加・相乗平均の関係の証明をこの方法で考えさせてみるとよいだろう。

（山口県立岩国高等学校）