つづく階差で転がり出たもの

藏川　忠興（くらかわ　ただおき）

§1. きっかけ，そして予想へ

微分概念の導入時に見受けそうな数表を電卓片手に書き付けた。

自然落下の観察 $\left(S=\frac{1}{2}gt^2 \quad g=9.8\,\mathrm{m/s^2}\ (\text{時間単位　秒})\right)$

t	0	1	2	3	4	5
S	0	4.9	19.6	44.1	78.4	122.5
階差 1		4.9	14.7	24.5	34.3	44.1

（1回目に取る階差を「階差1」，階差1の階差を「階差2」などと，順次そう呼ぶことにする）

ご承知の通り，階差をとることで各間隔における速さの平均値が求まるのだが，これに対しつづく階差を何気なくとった。すると，

階差 2	9.8	9.8	9.8	9.8

g に相当する 9.8 がどこまでも並びそうにある。私にはこれが偶然と思えず，本稿のきっかけとなった。

Newton は物体の運動の研究を通じて微分の発見へ至ったと言われている。こんな試みをしてみた。

$S=\alpha t$ (時間単位　秒)

t	0	1	2	3	4	5
S	0	α	2α	3α	4α	5α
階差 1		α	α	α	α	α

階差1の一般項＝α　一定値

$S=\alpha t^2$ (時間単位　秒)

t	0	1	2	3	4	5
S	0	α	4α	9α	16α	25α
階差 1		α	3α	5α	7α	9α
階差 2			2α	2α	2α	2α

階差2の一般項＝2α　一定値

t の次数に応じそれと同じ回数の階差をとるとき，一定値が並ぶのに興味が湧く。一定値につく係数が1，2，さらに $S=\alpha t^3$ (時間単位　秒) に対し，階差3を求めれば6が出る。ここまで並ぶと，1!，2!，3!，…，つまり階乗で表される数になるのでは？──とすれば一般に，

「$S=\alpha t^n$ に対して $n!\alpha$ ではないか」

t の次数に応じた階差をとりつづけると，偶然に現れる規則性らしきものに，私は期待を込めた予想を立ててしまった。t の次数と同回数の階差において，微分法則めいた結果が姿を見せている。運動する物体に作用する力の原因を探る実験を繰り返すうち，それが一定値であると見当のつく頃，Newton もこの結果を目にしたことがあったのではと想像はどこまでも膨らむが，Newton 絡みの話は別稿に委ね，予想を証明するため次節へ進む。

§2. 一般に

予想を正確に記せば，

「$S=\alpha t^n$ に対し $t=a_i$ (n，i：自然数，ただし $a_i=i-1$) として得られる数列 $\{S\}$ において階差を n 回取りつづけるとき，階差 n は一定値 $n!\alpha$ の数列になる」　……①

①が正しければ，§1冒頭の階差2で 9.8 が並ぶのに納得もゆく。

証明に際し必要とした心得がある。それは各階差に見られる特徴で，その様子を表Ⅰで示そう。

［表Ⅰ］

関数 $f(t)=t^n$ に対し，

t	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	…
$f(a_i)$	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	a_5^n	…
階差 1	$a_2^n-a_1^n$	$a_3^n-a_2^n$	$a_4^n-a_3^n$	$a_5^n-a_4^n$		…
階差 2	$a_3^n-2a_2^n+a_1^n$	$a_4^n-2a_3^n+a_2^n$	$a_5^n-2a_4^n+a_3^n$			…
階差 3	$a_4^n-3a_3^n+3a_2^n-a_1^n$	$a_5^n-3a_4^n+3a_3^n-a_2^n$				…
階差 4	$a_5^n-4a_4^n+6a_3^n-4a_2^n+a_1^n$					
……	……					

(注：$t=0$，1，2，…，であるが，t それぞれの値が各階差でどのように現れ動くかを見るため，文字列のままにしている)

表Ⅰによれば，数列 $\{f(a_i)\}$ の階差を取りつづけるときに現れる特徴が読み取れるが，本稿で必要と

したのは2つ。1つは各階差の項に関する規則性で，その初項は階差の番号より1大きい添え字 i と同じく1多い個数の a_i が，多項式の左端から添え字の大きい順に配置され，第2項以降は添え字が順次1ずつ増えつつ，初項と同個数の a_i が同様に配置される。もう1つは，階差ごとに各項の係数に現れる数字の並び方に規則性が見られ，同一階差内ではすべての項について同じである。それを抽出し表にすると，

［表Ⅱ］

階差1では				1		−1			
階差2では			1		−2		1		
階差3では		1		−3		3		−1	
階差4では	1		−4		6		−4		1
……					……				

表Ⅱは〈パスカルの三角形〉に似るものの，変則な並びになっている。証明では，この並びが大切な役割を担う。そのため，表Ⅱを《変則パスカルの三角形》と名付け以後参照する。各段の数字の並び方は $(a-b)^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を二項展開したときの係数に一致するが，パスカルの三角形の作り方に倣えば，各階差とも，(左端の値)=1，間の値は上段の2値を使い（右の値）−(左の値）より求め，右端の値は −1 と1とを交互に繰り返す。これが作り方である。さらには，

$p_{1,m}$：階差1の数列の一般項あるいは第 m 項

$p_{2,m}$：階差2の数列の一般項あるいは第 m 項

…

$p_{l,m}$：階差 l の数列の一般項あるいは第 m 項

$(l,\ m$：自然数）などの表記も用いる。

(注：例えば同じ $p_{2,m}$ でも $S=\alpha t^2$ に対しては $p_{2,m}=2!\alpha$，$S=\alpha t$ に対しては $p_{2,m}=0$ となる。これらの値は証明後初めて保証の付くものながら以後本稿において混乱のないよう，値が t の次数に依存することに留意願いたい)

改めて断るが $p_{l,m}$ の値は t の次数に依存する。とりあえず次数 n での一般項 $p_{l,m}$ を用意しよう。表Ⅰから読み取れる規則性に従えば，$S=\alpha t^n$ に対し $t=a_i$ $(a_i=i-1,\ i$：自然数）として得られる数列 $\{S\}$ について階差 l まで取るときその一般項は，

$$p_{l,m}=\{\sum_{r=0}^{l}(-1)^r{}_l\mathrm{C}_r a^n_{l+1-r+(m-1)}\}\alpha$$

$$=\Bigl\{a^n_{l+1+(m-1)}-la^n_{l+(m-1)}+\frac{l(l-1)}{2!}a^n_{l-1+(m-1)}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{**}la^n_{2+(m-1)}+(-1)^{*}a^n_{1+(m-1)}\Bigr\}\alpha \quad \cdots\cdots②$$

(注：ここでは $(-1)^*=(-1)^l$，$(-1)^{**}=(-1)^{l-1}$ である。しかし以後，$(-1)^*$ は l が偶数なら1，奇数なら −1。また $(-1)^{**}$ は l が偶数なら −1，奇数なら1を表すものとし用いている。また，以後②を用いるのに，特に断りなく変数 l，n を適宜書き換えている）と表される。

※表Ⅰに関し本稿で必要とした規則性2つについての証明は後述している。

(参照：§3 証明追記《その2》)

さて①の証明は数学的帰納法による。$n=1$ のとき正しいことを示そう。

$S=\alpha t$ に対し，$t=a_i$ $(a_i=i-1,\ i$：自然数）として得られる数列 $\{S\}$ の階差1までとるとき，その一般項は②より，

$$p_{1,m}=(a^1_{2+(m-1)}-a^1_{1+(m-1)})\alpha$$

ところが a_i の決め方から，任意の自然数 m に対し常に $a^1_{2+(m-1)}-a^1_{1+(m-1)}=1$ である。したがって，

$p_{1,m}=1!\alpha$ (m に無関係な一定値)

よって，$n=1$ のとき①は正しいと示された。

そこで，$n\leqq k$ のとき成り立つと仮定。つまり②の値について，

$S=\alpha t^k$ に対し，$p_{k,m}=k!\alpha$ (m に無関係な一定値)

$S=\alpha t^{k-1}$ に対し，$p_{k-1,m}=(k-1)!\alpha$

(m に無関係な一定値)

…… ……③

などになると。

仮定③が成り立つとして，$S=\alpha t^{k+1}$ に対し m に関係なく $p_{k+1,m}=(k+1)!\alpha$ となるのを示さねばならないが，まず $p_{k+1,1}=(k+1)!\alpha$ を示す。

$S=\alpha t^{k+1}$ に対する $p_{k+1,1}$ とは，$S=\alpha t^{k+1}$ に $t=a_i$ $(a_i=i-1,\ i$：自然数）を代入し得られる数列 $\{S\}$ において階差 $(k+1)$ までとるとき現れる初項であって②より，

$$p_{k+1,1}=\{\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r{}_{k+1}\mathrm{C}_r a^{k+1}_{(k+1)+1-r}\}\alpha$$

$$=\{a^{k+1}_{k+2}-(k+1)a^{k+1}_{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}a^{k+1}_{k}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{*}(k+1)a^{k+1}_{2}+(-1)^{**}a^{k+1}_{1}\}\alpha$$

……④

(注：②と比べ④では $(-1)^*$ と $(-1)^{**}$ が入れ替わっている。②において $l=n=k$ としたときの k 自身が，偶数か奇数かで ±1 を決めるものとした。以

降もこれに従い，式中係数の変形にともない同様の入れ替えは生じている）である。

④において a_i 各項の係数をその値に応じ変形，あるいは分解を施し，

$$=\left\{a_{k+2}^{k+1}+(-1-k)a_{k+1}^{k+1}+\left(k+\frac{k(k-1)}{2!}\right)a_k^{k+1}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{**}(-k-1)a_2^{k+1}+(-1)^{*}(-1)a_1^{k+1}\right\}\alpha$$

とする。変形あるいは分解された係数についてその絶対値が一致する $\{a_i\}$ のうち隣接項どうし組み合わせ（　）で括れば，

$$=\left\{(a_{k+2}^{k+1}-a_{k+1}^{k+1})-k(a_{k+1}^{k+1}-a_k^{k+1})\right.$$
$$+\frac{k(k-1)}{2!}(a_k^{k+1}-a_{k-1}^{k+1})-\cdots$$
$$\left.+(-1)^{**}k(a_3^{k+1}-a_2^{k+1})+(-1)^{*}(a_2^{k+1}-a_1^{k+1})\right\}\alpha$$

そして括った（　）ごとに因数分解して，

$$=\{(a_{k+2}-a_{k+1})$$
$$\times(a_{k+2}^k+a_{k+2}^{k-1}a_{k+1}+a_{k+2}^{k-2}a_{k+1}^2+\cdots+a_{k+1}^k)$$
$$-k(a_{k+1}-a_k)(a_{k+1}^k+a_{k+1}^{k-1}a_k+a_{k+1}^{k-2}a_k^2+\cdots+a_k^k)$$
$$+\frac{k(k-1)}{2!}(a_k-a_{k-1})$$
$$\times(a_k^k+a_k^{k-1}a_{k-1}+a_k^{k-2}a_{k-1}^2+\cdots+a_{k-1}^k)-\cdots$$
$$+\cdots+(-1)^{*}(a_2-a_1)(a_2^k+a_2^{k-1}a_1+\cdots+a_1^k)\}\alpha$$

ところが $\{a_i\}$ の値の決め方から

$(a_{k+2}-a_{k+1})=(a_{k+1}-a_k)=\cdots=(a_2-a_1)=1$ なので，

$$=\{(a_{k+2}^k+a_{k+2}^{k-1}a_{k+1}+a_{k+2}^{k-2}a_{k+1}^2+\cdots+a_{k+1}^k)$$
$$-k(a_{k+1}^k+a_{k+1}^{k-1}a_k+a_{k+1}^{k-2}a_k^2+\cdots+a_k^k)$$
$$+\frac{k(k-1)}{2!}(a_k^k+a_k^{k-1}a_{k-1}+a_k^{k-2}a_{k-1}^2+\cdots+a_{k-1}^k)-\cdots$$
$$+\cdots+(-1)^{*}(a_2^k+a_2^{k-1}a_1+a_2^{k-2}a_1^2+\cdots+a_1^k)\}\alpha$$

再び a_i 各項の組み合わせを変え，各（　）の前につく係数も添え，以下のように｛　｝で括り直し，

$$=\left[\left\{a_{k+2}^k-ka_{k+1}^k+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^k-\cdots+(-1)^{**}ka_3^k+(-1)^{*}a_2^k\right\}\right.$$
$$+\left\{a_{k+2}^{k-1}a_{k+1}-ka_{k+1}^{k-1}a_k+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-1}a_{k-1}-\cdots+(-1)^{**}ka_3^{k-1}a_2+(-1)^{*}a_2^{k-1}a_1\right\}$$
$$+\left\{a_{k+2}^{k-2}a_{k+1}^2-ka_{k+1}^{k-2}a_k^2+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-2}a_{k-1}^2-\cdots+(-1)^{**}ka_3^{k-2}a_2^2+(-1)^{*}a_2^{k-2}a_1^2\right\}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$\left.+\left\{a_{k+1}^k-ka_k^k+\frac{k(k-1)}{2!}a_{k-1}^k-\cdots+(-1)^{**}ka_2^k+(-1)^{*}a_1^k\right\}\right]\alpha \quad \cdots\cdots⑤$$

とまとめることにより，｛　｝内における a_i 各多項式の係数がすべて同じになり，《変則パスカルの三角形》において階差 k の並びに一致させられる。

ここで⑤１番目の｛　｝である。これは各 a_i の次数と番号 i の並びから，$S=\alpha t^k$ に対し階差 k までとったときに現れる数列の第２項 $p_{k,2}$ $(a_{k+2}>a_{k+1}>\cdots>a_2)$。同様に最後（$(k+1)$ 番目）の｛　｝は初項 $p_{k,1}$ $(a_{k+1}>a_k>\cdots>a_1)$。いずれの値も仮定③によれば $k!\alpha$。（注：｛　｝の値については α を含んで扱うものとし，これ以後も場面に応じ同様とする）

つづいて⑤２番目の｛　｝以降 k 番目｛　｝までの値を求めるが，２番目の｛　｝，つまり，

$$\left\{a_{k+2}^{k-1}a_{k+1}-ka_{k+1}^{k-1}a_k+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-1}a_{k-1}-\cdots+(-1)^{**}ka_3^{k-1}a_2+(-1)^{*}a_2^{k-1}a_1\right\}\alpha \quad \cdots\cdots⑥$$

について，a_i の値の決め方から $a_{k+2}=a_{k+1}+1$，$a_{k+1}=a_k+1$，…であり，それぞれ $a_{k+1}=a_{k+2}-1$，$a_k=a_{k+1}-1$，…と変形できる。これらを使えば，

$$=\{a_{k+2}^{k-1}(a_{k+2}-1)-ka_{k+1}^{k-1}(a_{k+1}-1)$$
$$+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-1}(a_k-1)-\cdots$$
$$+(-1)^{**}ka_3^{k-1}(a_3-1)+(-1)^{*}a_2^{k-1}(a_2-1)\}\alpha$$

各（　）を展開し，a_i を同次数どうし括り直して，

$$=\left\{\left(a_{k+2}^k-ka_{k+1}^k+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^k-\cdots+(-1)^{**}ka_3^k+(-1)^{*}a_2^k\right)\right.$$
$$\left.-\left(a_{k+2}^{k-1}-ka_{k+1}^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-1}-\cdots+(-1)^{**}ka_3^{k-1}+(-1)^{*}a_2^{k-1}\right)\right\}\alpha$$
$$\cdots\cdots⑦$$

⑦の｛　｝内１番目の（　）の式は，各 a_i の次数と番号 i の並びから $S=\alpha t^k$ に対し，階差 k までとったときに現れる数列の第２項 $p_{k,2}$ $(a_{k+2}>a_{k+1}>\cdots>a_2)$ で，仮定③より値は $k!\alpha$

２番目の（　）の式も同様に判断し，$S=\alpha t^{k-1}$ に対し階差 k までとった数列の第２項 $p_{k,2}$ $(a_{k+2}>a_{k+1}>\cdots>a_2)$。１番目の（　）と同じ $p_{k,2}$ ながら，値は t の次数に依存するのだった。$S=\alpha t^{k-1}$ にお

ける $\{S\}$ に対し階差 $(k-1)$ までとれば，仮定③より $p_{k-1,m}=(k-1)!\alpha$（m に無関係な一定値）。これにつづく階差は

$p_{k,m}=p_{k-1,m+1}-p_{k-1,m}=(k-1)!\alpha-(k-1)!\alpha=0$

（m に無関係な一定値）。つまり $p_{k,2}=0$　結局⑦すなわち⑥の値は，$=\{(k!)-(0)\}\alpha=k!\alpha$

次に⑤ 3 番目の{　}について，

$$\begin{aligned}&\Bigl\{a_{k+2}^{k-2}a_{k+1}^2-ka_{k+1}^{k-2}a_k^2+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-2}a_{k-1}^2-\cdots\\&\qquad+(-1)^{**}ka_3^{k-2}a_2^2+(-1)^{*}a_2^{k-2}a_1^2\Bigr\}\alpha\end{aligned}$$

これも⑤ 2 番目の{　}のときと同様に変形すると，

$$\begin{aligned}&=\{a_{k+2}^{k-2}(a_{k+2}-1)^2-ka_{k+1}^{k-2}(a_{k+1}-1)^2\\&\quad+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-2}(a_k-1)^2-\cdots\\&\quad+(-1)^{**}ka_3^{k-2}(a_3-1)^2+(-1)^{*}a_2^{k-2}(a_2-1)^2\}\alpha\\&=\{a_{k+2}^{k-2}(a_{k+2}^2-2a_{k+2}+1)-ka_{k+1}^{k-2}(a_{k+1}^2-2a_{k+1}+1)\\&\quad+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-2}(a_k^2-2a_k+1)-\cdots\\&\quad+(-1)^{**}ka_3^{k-2}(a_3^2-2a_3+1)\\&\qquad+(-1)^{*}a_2^{k-2}(a_2^2-2a_2+1)\}\alpha\\&=\Bigl[\Bigl\{a_{k+2}^{k}-ka_{k+1}^{k}+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{**}ka_3^{k}+(-1)^{*}a_2^{k}\Bigr\}\\&\quad-2\Bigl\{a_{k+2}^{k-1}-ka_{k+1}^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-1}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{**}ka_3^{k-1}+(-1)^{*}a_2^{k-1}\Bigr\}\\&\quad+\Bigl\{a_{k+2}^{k-2}-ka_{k+1}^{k-2}+\frac{k(k-1)}{2!}a_k^{k-2}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{**}ka_3^{k-2}+(-1)^{*}a_2^{k-2}\Bigr\}\Bigr]\alpha\end{aligned}$$

とまとまる。これを⑦同様に処理して，

$=[\{k!\}-2\{0\}+\{0\}]\alpha=k!\alpha$

他も同様で，⑤ 2 番目の{　}以降 k 番目の{　}までの値はいずれも $k!\alpha$　ところが⑤は $(k+1)$ 個の{　}を含んでいた。したがって，⑤すなわち④の値は，

$$p_{k+1,1}=(k+1)(k!\alpha)=(k+1)!\alpha \qquad\cdots\cdots⑧$$

つまり，$S=\alpha t^{k+1}$ に対し，$\{S\}$ の階差を $(k+1)$ 回取りつづけるとき，その初項の値は $(k+1)!\alpha$ と示せた。

さらに，「$S=\alpha t^{k+1}$ に対する $p_{k+1,m}$ は m に関係なく一定値」を言わねばならない。そのために，

$p_{k+1,2}=p_{k+1,1}$ を示そう。$p_{k+1,1}$ 同様②より，

$$\begin{aligned}p_{k+1,2}=&\Bigl\{a_{k+3}^{k+1}-(k+1)a_{k+2}^{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}a_{k+1}^{k+1}-\cdots\\&\cdots+(-1)^{*}(k+1)a_3^{k+1}+(-1)^{**}a_2^{k+1}\Bigr\}\alpha\quad\cdots\cdots⑨\end{aligned}$$

（㊟：ここも④の㊟に従い $(-1)^{*}$ と $(-1)^{**}$ が入れ替わっている）

関係式 $a_{k+3}=a_{k+2}+1$，$a_{k+2}=a_{k+1}+1$，…を用い⑨を書き直すと，

$$\begin{aligned}&=\{(a_{k+2}+1)^{k+1}-(k+1)(a_{k+1}+1)^{k+1}\\&\qquad+\frac{(k+1)k}{2!}(a_k+1)^{k+1}-\cdots\\&\quad+(-1)^{*}(k+1)(a_2+1)^{k+1}+(-1)^{**}(a_1+1)^{k+1}\}\alpha\end{aligned}$$

{　}内の各(　)ごとに $(k+1)$ 次の 2 項展開をする。

$$\begin{aligned}&=\Bigl\{\Bigl(a_{k+2}^{k+1}+(k+1)a_{k+2}^{k}+\frac{(k+1)k}{2!}a_{k+2}^{k-1}+\cdots\\&\qquad\cdots+(k+1)a_{k+2}+(1)^{k+1}\Bigr)\\&\quad-(k+1)\Bigl(a_{k+1}^{k+1}+(k+1)a_{k+1}^{k}+\frac{(k+1)k}{2!}a_{k+1}^{k-1}+\cdots\\&\qquad\cdots+(k+1)a_{k+1}+(1)^{k+1}\Bigr)\\&\quad+\frac{(k+1)k}{2!}\Bigl(a_k^{k+1}+(k+1)a_k^{k}+\frac{(k+1)k}{2!}a_k^{k-1}+\cdots\\&\qquad\cdots+(k+1)a_k+(1)^{k+1}\Bigr)\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^{**}\Bigl(a_1^{k+1}+(k+1)a_1^{k}+\frac{(k+1)k}{2!}a_1^{k-1}+\cdots\\&\qquad\cdots+(k+1)a_1+(1)^{k+1}\Bigr)\Bigr\}\alpha\end{aligned}$$

ここでも a_i 各項の組み合わせを変え，各(　)の前に付く係数も添え，⑤同様{　}で括り直しまとめれば，

$$\begin{aligned}&=\Bigl[\Bigl\{a_{k+2}^{k+1}-(k+1)a_{k+1}^{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}a_k^{k+1}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{*}(k+1)a_2^{k+1}+(-1)^{**}a_1^{k+1}\Bigr\}\\&\quad+(k+1)\Bigl\{a_{k+2}^{k}-(k+1)a_{k+1}^{k}+\frac{(k+1)k}{2!}a_k^{k}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{*}(k+1)a_2^{k}+(-1)^{**}a_1^{k}\Bigr\}\\&\quad+\frac{(k+1)k}{2!}\Bigl\{a_{k+2}^{k-1}-(k+1)a_{k+1}^{k-1}+\frac{(k+1)k}{2!}a_k^{k-1}-\cdots\\&\qquad+(-1)^{*}(k+1)a_2^{k-1}+(-1)^{**}a_1^{k-1}\Bigr\}\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\\&+(k+1)\Bigl\{a_{k+2}-(k+1)a_{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}a_k-\cdots\\&\qquad+(-1)^{*}(k+1)a_2+(-1)^{**}a_1\Bigr\}\end{aligned}$$

$$+\left\{(1)^{k+1}-(k+1)(1)^{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}(1)^{k+1}-\cdots\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{*}(k+1)(1)^{k+1}+(-1)^{**}(1)^{k+1}\right\}\right]\alpha \quad \cdots\cdots⑩$$

いずれの{ }内も多項式の係数はすべて同じになり,《変則パスカルの三角形》において階差$(k+1)$の並びに一致する。

⑩1番目の{ }について。これはa_iの次数と番号iの並びから,$S=\alpha t^{k+1}$に対する$p_{k+1,1}$($a_{k+2}>a_{k+1}>\cdots>a_1$)であり,⑧より $p_{k+1,1}=(k+1)!\alpha$

2番目の{ }すなわち,

$$\left\{a_{k+2}^k-(k+1)a_{k+1}^k+\frac{(k+1)k}{2!}a_k^k-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{*}(k+1)a_2^k+(-1)^{**}a_1^k\right\} \quad \cdots\cdots⑪$$

について。a_iの次数はk $S=\alpha t^k$ に対し階差$(k+1)$まで取ると現れる数列の初項$p_{k+1,1}$($a_{k+2}>a_{k+1}>\cdots>a_1$)である。見かけは⑩1番目の{ }と同じ$p_{k+1,1}$ながら $S=\alpha t^{k+1}$ に対するものでない。仮定③によれば $p_{k,m}=k!\alpha$(mに無関係な一定値)であって,つづく階差$p_{k+1,m}$の値はmに関係なく0
つまり⑪の値は,$=\{0\}=0$

同じ理由から3番目の{ }以降$(k+1)$番目の{ }(最後から2番目)までの値も0になる。

そして$(k+2)$番目(最後の){ },すなわち,

$$\left\{(1)^{k+1}-(k+1)(1)^{k+1}+\frac{(k+1)k}{2!}(1)^{k+1}-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{*}(k+1)(1)^{k+1}+(-1)^{**}(1)^{k+1}\right\} \quad \cdots\cdots⑫$$

について。実は任意の実数aかつ自然数nに対し,

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r a^n=0 \quad \cdots\cdots⑬$$

である。なぜなら次式⑭を2項展開すると,

$$(a-b)^n \quad \cdots\cdots⑭$$

$$=a^n+na^{n-1}(-b)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(-b)^2+\cdots$$

$$+na(-b)^{n-1}+(-b)^n$$

$b=a$ とおいて,

$$=a^n+na^{n-1}(-a)+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+na(-a)^{n-1}+(-a)^n$$

$$=a^n-na^n+\frac{n(n-1)}{2!}a^n-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{**}na^n+(-1)^{*}a^n$$

これを$\sum$で表せば,

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_n\mathrm{C}_r a^n \quad (=⑬の左辺)$$

ところが⑭に対し $b=a$ とおいたのだから,

$$⑭=(a-a)^n=0$$

⑬が成立する。実数aと自然数nは任意で,⑬の左辺において $n=k+1$ かつ $a=1$ とすれば⑫になる。よって ⑫の値$=0$
以上から⑩すなわち⑨の値は,

$$=\left[\{(k+1)!\}+(k+1)\{0\}+\frac{(k+1)k}{2}\{0\}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\{0\}\right]\alpha=(k+1)!\alpha$$

となり,$p_{k+1,2}=p_{k+1,1}$ が示された。

以降同様に議論を繰り返せば,任意の自然数mに対し

$$p_{k+1,m}=\cdots=p_{k+1,2}=p_{k+1,1}$$

が順次導かれ,$S=\alpha t^{k+1}$に対し $p_{k+1,m}=(k+1)!\alpha$(mに無関係な一定値)になると結論付けられる。つまり,すべての自然数nに対し予想①は正しい。

§3. 証明追記

《その1》 §2ではa_iが0および自然数値をとるときを扱った。しかし$\{a_i\}$を整数域へ広げても[表Ⅰ]に現れ証明で必要とした規則性2つは変わらない。結局予想①は正しい。理由の要点は,$p_{n,m}=n!\alpha$を導くのに使った関係式は $a_{i+1}=a_i+1$ のみ。これはそのままに条件を「a_i:整数,i:項番号(自然数)」と書き換える。換えても $p_{1,m}=(a_{2+(m-1)}^1-a_{1+(m-1)}^1)\alpha$の値は不変で $p_{1,m}=1!\alpha$ は成立。つづいて $S=\alpha t^k$に対し$\{S\}$($t=a_i$:負の整数列)の階差をk回取る。

k:偶数のとき $S>0$ そのあと $p_{1,m}<0$,$p_{2,m}>0$,…,負から正への反転を$\dfrac{k}{2}$組繰り返し,$p_{k,m}>0$

k:奇数のとき $S<0$ そのあと $p_{1,m}>0$,$p_{2,m}<0$,…,正から負への反転を$(k-1)/2$組繰り返し,$p_{k,m}>0$

[($t=a_i$:0または自然数)との違いは符号の反転にすぎない。なお$\{S\}$($t=a_i$:0 を跨ぐ整数列)のときは,$\{S\}$および$p_{l,m}$に負数や0も現れるが,階差をとりつづけ負数や0の影響が消えてのちは,符号の反転もなくなる]

つまり,大小順を守って代入する限り$\{a_i\}$の範囲を広げても仮定③に不都合は生じず($n\leqq k-1$ も同様),数学的帰納法の運用に支障はないからである。

《その２》 §2で「後述する」としていた［表Ⅰ］に現れる規則性についての証明を以下に示す。

関数 $f(t)=t^n$ に対し，階差の範囲を拡大した表を書けば，

t	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
$f(a_i)$	a_1^n	a_2^n	a_3^n	a_4^n	a_5^n	$\cdots$
階差１	$a_2^n-a_1^n$	$a_3^n-a_2^n$	$a_4^n-a_3^n$	$a_5^n-a_4^n$		$\cdots$
階差２	$a_3^n-2a_2^n+a_1^n$	$a_4^n-2a_3^n+a_2^n$	$a_5^n-2a_4^n+a_3^n$			$\cdots$
……		……				
階差 l	$p_{l,1}$	$p_{l,2}$	$p_{l,3}$	$p_{l,4}$		$\cdots$
階差 $(l+1)$	$p_{l+1,1}$	$p_{l+1,2}$	$p_{l+1,3}$			$\cdots$
……		……				

まず階差１について，［表Ⅰ］で主張した規則性２つが一般に正しいのは階差の作り方から自明。さらに数列 $\{f(a_i)\}$ の階差を取りつづけるとき［表Ⅰ］で見た規則性２つが階差 l において正しい，つまり，

$$p_{l,m}=\{\sum_{r=0}^{l}(-1)^r{}_lC_r a^n_{l+1-r+(m-1)}\}\alpha$$

$$=\Big\{a^n_{l+1+(m-1)}-la^n_{l+(m-1)}+\frac{l(l-1)}{2!}a^n_{l-1+(m-1)}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{**}la^n_{2+(m-1)}+(-1)^*a^n_{1+(m-1)}\Big\}\alpha \quad \cdots\cdots⑮$$

(㊟：$(-1)^*$，$(-1)^{**}$ については②同様)と仮定。このとき階差数列の作り方より階差 $(l+1)$ の初項は，

$p_{l+1,1}$

$=p_{l,2}-p_{l,1}$

$$=\Big\{a^n_{l+2}-la^n_{l+1}+\frac{l(l-1)}{2!}a^n_l-\cdots$$

$$+(-1)^{**}la^n_3+(-1)^*a^n_2\Big\}\alpha$$

$$-\Big\{a^n_{l+1}-la^n_l+\frac{l(l-1)}{2!}a^n_{l-1}-\cdots$$

$$+(-1)^{**}la^n_2+(-1)^*a^n_1\Big\}\alpha \quad \cdots\cdots⑯$$

a_i に関し添え字 i が同一な項どうしまとめて，

$$=\Big\{a^n_{l+2}-(l+1)a^n_{l+1}+\frac{(l+1)l}{2!}a^n_l-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^*(l+1)a^n_2+(-1)^{**}a^n_1\Big\}\alpha \quad \cdots\cdots⑰$$

⑮を仮定すれば，主張した規則性２つが階差 $(l+1)$ の初項においても読み取れることを，⑰は示している。

$p_{l+1,2}=p_{l,3}-p_{l,2}$，…，$p_{l+1,m}=p_{l,m+1}-p_{l,m}$，…，についても⑯から⑰へ導いたのと同様にし，それらの多項式(ほぼ自明なので式の明記は省くが)を順に数列として並べれば，⑰に現れたように規則性２つが読み取れる。以上［表Ⅰ］に関して，主張した規則性２つはいずれの階差においても正しいと示せた。

§4. もう少しだけ Newton

今一度②を取り上げたい。ただし，$\alpha=m=1$ かつ $l\to n$，$n\to k$ に書き換えて，

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r{}_nC_r a^k_{n+1-r}$$

$$=a^k_{n+1}-na^k_n+\frac{n(n-1)}{2!}a^k_{n-1}-\cdots$$

$$+(-1)^{**}na^k_2+(-1)^*a^k_1 \quad \cdots\cdots⑱$$

(㊟：$a_n=n-1$，$k\leqq n$；k，n：自然数，また $(-1)^*$，$(-1)^{**}$ については②のとき同様)とする。$\alpha=1$ になっても要は，

$=p_{n,1}$

値は次数に依存する。予想結果により⑱の値は，

$$\begin{cases}1\leqq k\leqq n-1 \text{ のとき} & 0\\ k=n \text{ のとき} & n!\end{cases}$$

と言い切れる。もっと言えば $p_{n,m}$ の値はmに無関係(次数に応じた一定値に達してのち)だったから，$\{a_n\}$ の値として０から n までの数以外に「連続する任意の $n+1$ 個の自然数」を選んでも⑱の値はそもそも「不変」なのである。さらに踏み込み§3証明追記《その１》を加味すれば，**「連続する任意の $n+1$ 個の整数」**に対し**「不変」**と言ってよい。もとよりそうでなければならない。なぜなら Newton が運動する物体に作用する原因を探り始めた時刻を $t=0$ と見做せばその時刻から現在までを含め正の整数の時間が積み上げられてきた。仮に Newton の続きのままに $\{S\}$ の階差２を求めていれば 9.8 が並び続けるはずである。他方，私が電卓を叩き始めた時刻を $t=0$ と見做せば現在から Newton の時刻まで遡る同一量の時間が負の整数へと真逆に変わってしまう。負の整数に変わっても Newton の時刻まで遡り同様に階差２を求めるとき同一値でなければならず，この場合正と負の違いは立ち位置の違いにすぎないからである。「**式に備わる逞しさ**」である。これを含め何より結果が綺麗と私には映るが，主観にすぎないだろうか。

(元大阪府立高校教諭)