$f(x\pm y)=f(x)g(y)\pm g(x)f(y)$, $g(x\pm y)=g(x)g(y)\mp f(x)f(y)$ を満たす実数全体で微分可能な関数

－正弦・余弦の加法定理の逆－

いとう　のぶお
伊藤　亘央

§1. 正弦・余弦の加法定理の逆

以下の三角関数の正弦・余弦の加法定理はよく知られている。

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

では，その逆について，つまり以下の①～④を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ は，どのような関数になるのか。$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ の場合と同様に，実数全体で微分可能な関数として考察する。

$$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \quad \cdots\cdots①$$
$$f(x-y)=f(x)g(y)-g(x)f(y) \quad \cdots\cdots②$$
$$g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y) \quad \cdots\cdots③$$
$$g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y) \quad \cdots\cdots④$$

§2. ①～④の必要条件

まず，①～④の必要条件を考える。

明らかに，$f(x)=g(x)=0$ の場合がある。

以下，$f(x)=g(x)=0$ ではないとする。

$x=y$ とすると，②より　$f(0)=0$　……⑤

$y=0$ とすると，①，⑤より　$f(x)=f(x)g(0)$

③，⑤より　$g(x)=g(x)g(0)$

$f(x)=g(x)=0$ ではないから　$g(0)=1$　……⑥

$x=0$ とすると，②，⑤，⑥より　$f(-y)=-f(y)$

④，⑤，⑥より　$g(-y)=g(y)$

y を x に置き換えて　$f(-x)=-f(x)$　……⑦

$g(-x)=g(x)$　……⑧

つまり，$f(x)$ は奇関数，$g(x)$ は偶関数である。

$x=y$ とすると，④，⑥より

$$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=1 \quad \cdots\cdots⑨$$

⑨より，$f(x)$，$g(x)$ は，st 平面上の単位円 $s^2+t^2=1$ 上の点の座標となり，その点と原点を結ぶ動径の，s 軸の正の部分を始線とする回転角を θ として，次の2つの場合が考えられる。

(Ⅰ)　$s=g(x)=\cos\theta$，$t=f(x)=\sin\theta$

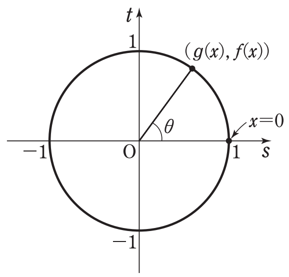
(Ⅱ)　$s=f(x)=\cos\theta$，$t=g(x)=\sin\theta$

いずれの場合も，θ を x の関数として，$\theta=\varphi(x)$ とおく。

(Ⅰ)　<u>$s=g(x)$，$t=f(x)$ とおく場合</u>

⑤，⑥より，$x=0$ は点 $(1,\ 0)$ に対応する。

$g(x)=\cos\theta$，$f(x)=\sin\theta$



$\theta=\varphi(x)$ に対して，

⑤，⑥より，整数定数 l が存在して，

$$\varphi(0)=2\pi l \quad \cdots\cdots⑩$$

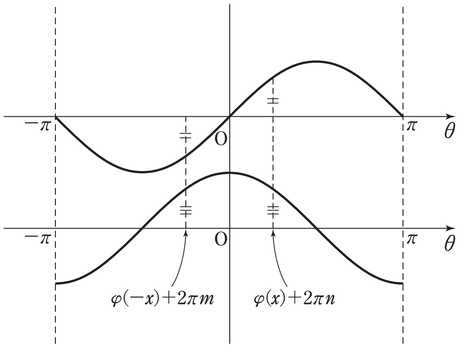
⑦，⑧より　$\sin(\varphi(-x))=-\sin(\varphi(x))$　……⑪

$\cos(\varphi(-x))=\ \ \cos(\varphi(x))$　……⑫

⑪かつ⑫より，任意の実数 x に対して，適当な整数 m，n が存在して，$\varphi(-x)$，$\varphi(x)$ を各々 $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲での代表元に置き換えると，絶対値が等しく符号が異なる関係であるから

$$(\varphi(-x)+2\pi m)+(\varphi(x)+2\pi n)=0$$

（m，n は整数）



よって　$\dfrac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2}=\pi N$ (Nは整数) ……⑬

ここで，整数Nは変数xの値に依存するから，Nをxの整数値関数として，$N(x)$で表すこととする。また，xを$-x$に置き換えても⑬におけるNは同じ値のはずであるから，常に
$N(-x)=N(x)$ である。

$$\frac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2}=\pi N(x) \qquad \cdots\cdots ⑭$$

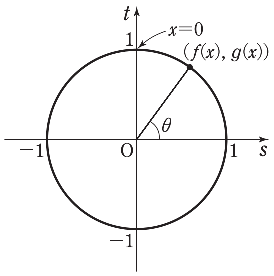
⑭は，$\varphi(-x)$，$\varphi(x)$の平均値が常に$\pi N(x)$であることを表す。つまり，$\theta=\varphi(x)$ のグラフ上の 2 点$(-x,\ \varphi(-x))$，$(x,\ \varphi(x))$を結ぶ線分の中点が，点$(0,\ \pi N(x))$である。したがって，$\varphi(x)$は適当な奇関数$\phi(x)$によって，
$\varphi(x)=\phi(x)+\pi N(x)$ と表される関数になる。

以上より $f(x)$，$g(x)$ は

$$f(x)=\sin(\phi(x)+\pi N(x)),$$
$$g(x)=\cos(\phi(x)+\pi N(x))$$

(II)　<u>$s=f(x)$，$t=g(x)$ とおく場合</u>

⑤，⑥より，$x=0$ は点$(0,\ 1)$に対応する。
$f(x)=\cos\theta$，$g(x)=\sin\theta$



$\theta=\varphi(x)$ に対して，
⑤，⑥より，整数定数lが存在して，

$$\varphi(0)=\frac{\pi}{2}+2\pi l \qquad \cdots\cdots ⑮$$

⑦，⑧より　$\cos(\varphi(-x))=-\cos(\varphi(x))$ ……⑯

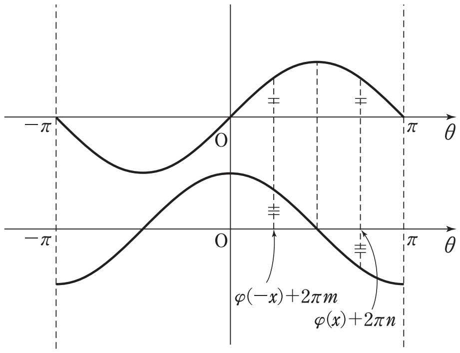
$$\sin(\varphi(-x))=\sin(\varphi(x)) \qquad \cdots\cdots ⑰$$

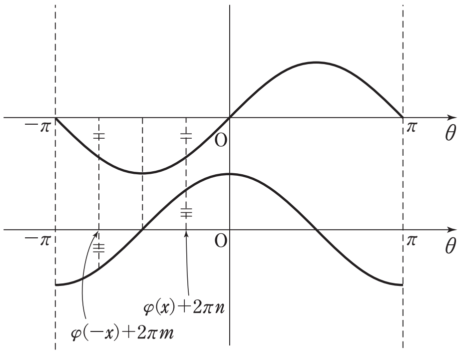
⑯かつ⑰より，任意の実数xに対して，適当な整数m，nが存在して，$\varphi(-x)$，$\varphi(x)$を各々$-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲での代表元に置き換えると，

平均値が $\pm\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\frac{(\varphi(-x)+2\pi m)+(\varphi(x)+2\pi n)}{2}=\pm\frac{\pi}{2}$$

(m，nは整数)





平均値 $\pm\dfrac{\pi}{2}$ のいずれの場合も

$$\frac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi N \ (N\text{は整数}) \qquad \cdots\cdots ⑱$$

(I)と同様に，整数Nを$N(x)$で表す。

$$\frac{\varphi(-x)+\varphi(x)}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi N(x) \qquad \cdots\cdots ⑲$$

$\varphi(x)$は，適当な奇関数$\phi(x)$によって，

$\varphi(x)=\phi(x)+\dfrac{\pi}{2}+\pi N(x)$ と表される関数になる。

以上より，$f(x)$，$g(x)$ は

$$f(x)=\cos\left(\phi(x)+\frac{\pi}{2}+\pi N(x)\right)$$
$$=-\sin(\phi(x)+\pi N(x)),$$
$$g(x)=\sin\left(\phi(x)+\frac{\pi}{2}+\pi N(x)\right)$$
$$=\cos(\phi(x)+\pi N(x))$$

以上の(Ⅰ)，(Ⅱ)をまとめると，①〜④の $f(x)=g(x)=0$ ではない場合の必要条件は

$$\begin{cases} f(x)=\sin(\phi(x)+\pi N(x)) \\ g(x)=\cos(\phi(x)+\pi N(x)) \end{cases} \quad \cdots\cdots ⑳$$

または

$$\begin{cases} f(x)=-\sin(\phi(x)+\pi N(x)) \\ g(x)=\cos(\phi(x)+\pi N(x)) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉑$$

⑳，㉑における $\phi(x)$ は奇関数である。$N(x)$ は整数値関数で，常に

$$N(-x)=N(x)$$

である。

ただし，⑳，㉑は関数 $\theta=\varphi(x)$ について，特別な縛りはなく，一般の①〜④の必要条件である。

冒頭で述べたように，今回“実数全体で微分可能”という条件下で考えたい。そのために，関数 $\theta=\varphi(x)$ が“実数全体で微分可能”なものとする。したがって，それ以前に実数全体で“連続”でなければならない。

整数値関数 $N(x)$ が定数関数でない場合，例えば，$N(x)=[|x|]$（[ ]はガウス記号）など，“跳び”をもつ場合，$\phi(x)$ が奇関数であるため，すべての不連続点を解消することは不可能である。

したがって，整数値関数 $N(x)$ は定数関数に限る。この場合，⑩，⑮より，$N(x)=2l$ となるから，⑳，㉑における $\pi N(x)$ は定数 $2\pi l$ に置き換えられるが，一般に

$$\sin(\theta+2\pi k)=\sin\theta$$
$$\cos(\theta+2\pi k)=\cos\theta \quad (k \text{ は整数})$$

であるから，あえて，“$+2\pi l$”は省いてよい。

したがって，⑳，㉑は次のように言い換えられる。

$$\begin{cases} f(x)=\sin(\phi(x)) \\ g(x)=\cos(\phi(x)) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉒$$

または

$$\begin{cases} f(x)=-\sin(\phi(x)) \\ g(x)=\cos(\phi(x)) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉓$$

㉒，㉓における $\phi(x)$ は，実数全体で微分可能な奇関数である。

§3. 十分性の考察

逆に，㉒，㉓の型の関数が①〜④を満たす，実数全体で微分可能な関数であるための，奇関数 $\phi(x)$ の十分性を調べる。

まず，㉒について

①，②の左辺 $=\sin(\phi(x\pm y))$

①，②の右辺 $=\sin(\phi(x))\cos(\phi(y)) \pm\cos(\phi(x))\sin(\phi(y)) =\sin\{\phi(x)\pm\phi(y)\}$

③，④の左辺 $=\cos(\phi(x\pm y))$

③，④の右辺 $=\cos(\phi(x))\cos(\phi(y)) \mp\sin(\phi(x))\sin(\phi(y)) =\cos\{\phi(x)\pm\phi(y)\}$

㉓についても同じ関係が得られ，㉒，㉓が①〜④を満たすためには，任意の実数 x，y に対して

$$\begin{cases} \sin(\phi(x\pm y))=\sin\{\phi(x)\pm\phi(y)\} \\ \cos(\phi(x\pm y))=\cos\{\phi(x)\pm\phi(y)\} \end{cases}$$

でなければならず，常に

$$\phi(x\pm y)=\phi(x)\pm\phi(y)+2\pi M \quad (M \text{ は整数}) \cdots\cdots ㉔$$

の関係になる。

ここで，任意の実数 x，y に対して，整数 M が一定だと仮定すると，$\phi(0)=0$ より，$M=0$ である。

整数 M が一定ではないと仮定すると，異なる整数 M_0，M_1 に対してその境目で不連続性が発生する。詳しくは以下のような説明になる。

xy 平面上の各点 $(x,\ y)$ に対し，㉔における整数 M が対応すると考える。M が一定ではないと仮定すると，次のような実数 x_0，y_0 が存在するはずである。

$$\phi(x_0+y_0)=\phi(x_0)+\phi(y_0)+2\pi M_0 \quad \cdots\cdots ㉕$$

として，

『点 $(x_0,\ y_0)$ の任意の近傍内に

$\phi(x_1+y_1)=\phi(x_1)+\phi(y_1)+2\pi M_1$,

$(x_0,\ y_0)\neq(x_1,\ y_1)$，$M_0\neq M_1$

である点 $(x_1,\ y_1)$ が存在する』

『 』内を言い換えると，十分小さい任意の実数 $\delta_0>0$ をとって $|x_1-x_0|<\delta_0$，$|y_1-y_0|<\delta_0$ なる実数 x_1，y_1 で

$$\phi(x_1+y_1)=\phi(x_1)+\phi(y_1)+2\pi M_1 \ (M_0\neq M_1) \quad \cdots\cdots ㉖$$

であるものが存在する。

また，関数 $\phi(x)$ の連続性から，十分小さい実数 $\varepsilon_0>0$ がとれて

$$|\phi(x_1)-\phi(x_0)|<\varepsilon_0,\ |\phi(y_1)-\phi(y_0)|<\varepsilon_0$$

とできる。㉕，㉖より

$$|\phi(x_1+y_1)-\phi(x_0+y_0)|= |\phi(x_1)-\phi(x_0)+\phi(y_1)-\phi(y_0)+2\pi(M_1-M_0)| \quad \cdots\cdots ㉗$$

$X_1=x_1+y_1$，$X_0=x_0+y_0$ とおくと

$|x_1-x_0|<\delta_0$，$|y_1-y_0|<\delta_0$ のとき

$|X_1-X_0|\leqq|x_1-x_0|+|y_1-y_0|<2\delta_0$

㉗の右辺の｜　｜の中において

$-2\varepsilon_0<\phi(x_1)-\phi(x_0)+\phi(y_1)-\phi(y_0)<2\varepsilon_0$

$|2\pi(M_1-M_0)|\geqq2\pi$

であるから

(㉗の右辺)$>2\pi-2\varepsilon_0$

ここで，$\delta=2\delta_0$，$\varepsilon=2\pi-2\varepsilon_0$ とおいて，以上をまとめると，実数 X_0 において

『十分小さい任意の実数 $\delta>0$ に対し，実数 $\varepsilon>0$ と実数 X_1 が存在して，

$|X_1-X_0|<\delta$，$|\phi(X_1)-\phi(X_0)|>\varepsilon$

となる』

ということになり，関数 $\phi(x)$ の連続性に反する。

したがって，㉔における整数 M は一定で，$M=0$ である。

以上より，㉒，㉓における奇関数 $\phi(x)$ は，常に

$\phi(x\pm y)=\phi(x)\pm\phi(y)$ ……㉘

でなければならない。

㉘より $y\neq0$ のとき $\dfrac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y}=\dfrac{\phi(y)}{y}$

$\phi'(0)$ が存在するから

$$\lim_{y\to0}\frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\phi(y)-\phi(0)}{y-0}$$

$\phi'(x)=\phi'(0)$

x は任意の実数であるから，$\phi'(x)$ は一定である。

$\phi'(0)=a$ とすると，$\phi(x)=ax$ (a は定数)

つまり $\phi(x)$ は比例関数である。

以上より，㉒，㉓における奇関数 $\phi(x)$ は，比例関数に限る。

§4. 結論

①～④を満たす，実数全体で微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ は，以下のようになる。a は実数定数であり，$a=0$ の場合も含む。

◎ $f(x)=g(x)=0$

◎ $\begin{cases} f(x)=\sin(ax) \\ g(x)=\cos(ax) \end{cases}$

◎ $\begin{cases} f(x)=-\sin(ax) \\ g(x)=\cos(ax) \end{cases}$

(愛知県　名古屋国際中学校・高等学校)