対数を含む方程式の指導について

内田（うちだ）　靖（やすし）

§1. はじめに

対数を含む方程式を解くとき，真数は正であるという条件（真数条件）に注意して解くようにと指導しますが，真数条件を確認する必要のない方程式もあります。教科書の例題などを見ると，真数条件をチェックしている場合とそうでない場合があり，生徒達からその違いについて質問を受けることがよくあります。２次方程式や三角関数を含む方程式の解については，ある程度具体的なイメージを提供しながら指導しますが，対数を含む方程式の場合はグラフを意識させることがほとんどないため，このような疑問が出てくるものと思われます。そこで，対数を含む方程式の真数条件や解の存在を，代数的な説明に終始するのではなく，生徒達が感覚的に理解できるような指導を目標として本稿を記します。

§2. 対数の性質の確認

対数を含む方程式で真数条件を確認する必要がないのは，$a>0$，$a\neq1$，k を定数として

$$\log_a f(x)=k \qquad \cdots\cdots①$$

の型の方程式を解く場合で，①は対数の定義から

$$f(x)=a^k>0$$

となり，真数条件はクリアしているからです*。ところが，方程式が

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=k \qquad \cdots\cdots②$$

の型となると，途端に真数条件が幅を利かせてきます。②を解くには，対数の性質

$$\log_a u+\log_a v=\log_a uv$$

を利用しますが，一般的に左辺の真数条件の方が右辺より厳しいにも関わらず，②の解法がこの変形に頼らざるを得ないことがその原因です。生徒の中には，この性質を無反省に使ってしまう者が大勢いるので，くれぐれも「$u>0$ かつ $v>0$」という条件付きで成り立つ等式であることを強調しておかなければなりません。このことを，もう少し詳しく記すと

・$u>0$ かつ $v>0$ のとき

$$\log_a uv=\log_a u+\log_a v$$

・$u<0$ かつ $v<0$ のとき

$$\log_a uv=\log_a(-u)+\log_a(-v)$$

となります。

§3. グラフの利用

ただ，このように説明しても生徒達にはなかなか納得してもらえません。抽象的な説明は生徒に不安を与えるらしく，理解を得るにはもう少し具体的な説明が必要なようです。そこで，２つの対数方程式

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-6)=3 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\log_2(x+1)(x-6)=3 \qquad \cdots\cdots④$$

を例にとって議論をすすめましょう。④は①型の対数方程式なので，真数条件を気にすることなく

$$(x+1)(x-6)=2^3$$

として，$x=-2$，7 が得られます。実際，これらは真数条件「$x<-1$ または $6<x$」を満たしています。一方，③の真数条件は

$$x+1>0 \text{ かつ } x-6>0$$

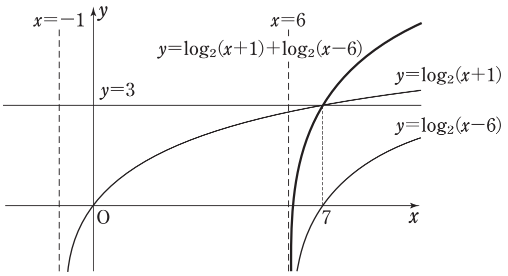
より「$x>6$」ですから，$x=-2$ は除外され $x=7$ だけが解となります。この違いを説明するにはグラフを利用するのがよいでしょう。

まず，関数 $y=\log_2(x+1)$ と $y=\log_2(x-6)$ のグラフをかいてみると，$x>6$ の範囲でなければ，２つの対数関数の和で表された関数

$$y=\log_2(x+1)+\log_2(x-6)$$

が定義できないことは明らかで，この関数のグラフの概形も容易に想像できます。そして，そのグラフから，方程式③の解が $x=7$ しかないことがはっきりします。

＊真数条件とは無関係に「解なし」となることはあります。



一方，$x+1>0$ かつ $x-6>0$ (i.e. $x>6$) のとき

$$\log_2(x+1)(x-6)=\log_2(x+1)+\log_2(x-6)$$

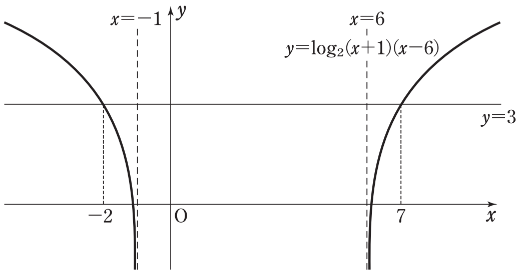
$x+1<0$ かつ $x-6<0$ (i.e. $x<-1$) のとき

$$\log_2(x+1)(x-6)=\log_2(-x-1)+\log_2(-x+6)$$

ですから，先程と同様にして，関数

$$y=\log_2(x+1)(x-6)$$

のグラフの概形をかくことは可能です。そして，こちらもグラフをみれば，方程式④の実数解が 2 個存在することが理解しやすいのではないでしょうか。



§4. 更なる考察

さて，②型の方程式でも真数条件を気にする必要のないものも存在します。それは

$$f(x)g(x)>0 \longleftrightarrow f(x)>0 \text{ かつ } g(x)>0$$

が成り立つとき，つまり

$$\{x \mid f(x)<0 \text{ かつ } g(x)<0\}=\varnothing$$

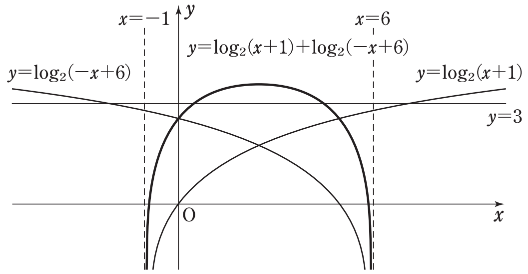
となる場合です。例えば，方程式

$$\log_2(x+1)+\log_2(-x+6)=3 \qquad \cdots\cdots⑤$$

などがそれにあたります。確かめておきましょう。

$$x+1>0 \text{ かつ } -x+6>0$$
$$\longleftrightarrow -1<x<6$$
$$\longleftrightarrow (x+1)(x-6)<0$$
$$\longleftrightarrow (x+1)(-x+6)>0$$

なお，方程式⑤の解は $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ で，グラフのイメージは下のような感じです。



$f(x)$ と $g(x)$ がともに 1 次式ならば，関数

$$y=\log_a f(x)+\log_a g(x)$$

のグラフの概形は 3 種類 (関数が定義されない場合を含めて 4 種類) に分類されるので，②型の方程式について，真数条件を確認する必要が“ある”か“ない”か，更に，方程式の解の個数についても具体的にまとめることができますが，そのあたりを生徒に考えさせてみるのも良いのではないでしょうか。

《参考文献》

〔1〕 高等学校 数学Ⅱ　数研出版
〔2〕 もういちど読む数研の高校数学 第 2 巻　数研出版

(大阪府　清教学園高等学校)