「互除法の逆行」の記法の改良

臼井 達哉

§1. はじめに

数研通信 No.78 に掲載された小島一義氏による「互除法の逆行」は次の通りである。

$344x+149y=1$ の特殊解を求めよ。

解答 互除法

	344	149	
2	298	138	3
	46	11	
4	44	10	5
	2	1	

逆行表

		1	
−5	−5	20	−4
−3	−63	21	
	−68	136	−2
		157	

よって $x=-68,\ y=157$ ■

この方法は整式の除法における組み立て除法同様，教科書に載せてもおかしくないほど優れた方法であると思う。互除法の後の計算が大変短く，普通の方法の 3 分の 1 以下の文字数で計算できる。

唯一の欠点は，この互除法の記法があまり一般的でないことである。これと逆行表の書き方を覚えることは現実的には生徒にとってかなり負担である。私自身，昔どこかで見たこの互除法の記法を思い出し，逆行表の書き方を理解するのに多少時間がかかった。この記法のままでは授業に取り入れるのは困難であると考え，この互除法の逆行の簡単な記法を考えてみた。

小島氏の解説はこの互除法の記法に依存している。そこで，まずこの記法に依存しない形でこの解法の原理を述べた後，逆行表の改良を試みる。

§2. 原理

$344x_2+149x_1=1$ …(A)

このように最初の未知数を x_1，x_2 とし，係数が小さい方を x_1 とすると見通しがよくなる。これを未知数の置換を繰り返して係数を小さくする方法で解く。この方法はよく知られており，数研「新編数学A」の課題研究にも記載されている。

1． 344 を 149 で割り，商と余りを求めて，
$(149\cdot2+46)x_2+149x_1=1$
$149(2x_2+x_1)+46x_2=1$
$x_3=2x_2+x_1$ ……① とおくと
$149x_3+46x_2=1$ ……②

2． ②から同様に $46(3x_3+x_2)+11x_3=1$
$x_4=3x_3+x_2$ ……③ とおくと
$46x_4+11x_3=1$ ……④

3． ④から $11(4x_4+x_3)+2x_4=1$
$x_5=4x_4+x_3$ ……⑤ とおくと
$11x_5+2x_4=1$ ……⑥

4． ⑥から $2(5x_5+x_4)+x_5=1$
$x_6=5x_5+x_4$ ……⑦ とおくと
$2x_6+x_5=1$ ……⑧

⑧から $x_6=0$，$x_5=1$ とすることができる。

ここから x_1，x_2 を求めるためには 2 つ方法がある。1つは⑥，④，②，(A)を用いる方法である。この方法では互除法の余りを用いることと割り算を用いるため，計算が複雑になる。

⑥から $x_4=\dfrac{1-11x_5}{2}=\dfrac{1-11\cdot1}{2}=-5$

④から $x_3=\dfrac{1-46x_4}{11}=\dfrac{1-46\cdot(-5)}{11}=21$

②から $x_2=\dfrac{1-149x_3}{46}=\dfrac{1-149\cdot21}{46}=-68$

(A)から $x_1=\dfrac{1-344x_2}{149}=\dfrac{1-344\cdot(-68)}{149}=157$

もう 1 つは⑦，⑤，③，①を用いる方法である。この方法では，互除法の商を用いるため係数が小さい場合が多く，割り算を使用しないため計算が簡単。

⑦から $x_4=x_6-5x_5=0-5\cdot1=-5$
⑤から $x_3=x_5-4x_4=1-4\cdot(-5)=21$
③から $x_2=x_4-3x_3=-5-3\cdot21=\underline{-68}$
①から $x_1=x_3-2x_2=21-2\cdot(-68)=\underline{157}$

この計算の係数部分だけを取り出して冒頭の互除法の書き方に合わせて形式化したものが逆行表である。

§3. 改良

まず互除法を通常の筆算を横に並べて行う。この方法はチャートにも用いられており，商が2桁以上になっても対応することができる。冒頭の記法よりやや効率は落ちるが，こちらの方が理解はしやすい。

$$\begin{array}{rrrrr} & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2) & 11 &)46 &)149 &)344 \\ & \underline{10} & \underline{44} & \underline{138} & \underline{298} \\ & 1 & 2 & 11 & 46 \end{array}$$

次にこの商に−を付け，上から順に縦に −5，−4，−3，−2 と書く。中央列の 0，1 はそれぞれ x_6，x_5 を表す。まず左列と中央列を掛けた結果を右列に書く。次に中央列と右列1行下を加えた結果を中央列のさらに1行下に書く。これを繰り返すことによって，中央列に上から順に x_4，x_3，x_2，x_1 が得られる。逆行表のように左右に振り分ける必要がなく，理解しやすいと思う。この表を書く手間は逆行表とほとんど変わらない。以下に表を書く手順を詳しく示す。

$$\begin{array}{r|c|l} \times & & + \\ & 0 & \\ -5 & 1 & \\ -4 & & \\ -3 & & \\ -2 & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|c|l} \times & & + \\ & 0 & \\ -5 & 1 \to & -5 \\ -4 & & \\ -3 & & \\ -2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 & \\ -3 & & \\ -2 & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 \to & 20 \\ -3 & & \\ -2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 & 20 \\ -3 & 21 & \\ -2 & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 & 20 \\ -3 & 21 \to & -63 \\ -2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 & 20 \\ -3 & 21 & -63 \\ -2 & -68 & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r|c|l} & 0 & \\ -5 & 1 & -5 \\ -4 & -5 & 20 \\ -3 & 21 & -63 \\ -2 & -68 \to & 136 \\ & 157 & \end{array}$$

ゆえに $x_2=-68$，$x_1=157$

§4. 一般解

この記法を用いると，特殊解を求めることなく一般解を直接求めることができる。互除法以外には次の表だけが必要である。

⑧から $x_6=k$ とすると，$x_5=1-2k$ であるから，

$$\begin{array}{r|c|l} \times & & + \\ & k & \\ -5 & 1-2k & \\ -4 & & \\ -3 & & \\ -2 & & \end{array}$$

ここから同様に計算すると，

$$\begin{array}{r|c|c} & k & \\ -5 & 1-2k & -5+10k \\ -4 & 11k-5 & -44k+20 \\ -3 & -46k+21 & 138k-63 \\ -2 & 149k-68 & -298k+136 \\ & -344k+157 & \end{array}$$

ゆえに，

$x_2=149k-68$，$x_1=-344k+157$（k は整数）

ただし，互除法から⑧は得られないため，$1-2k$ については「1から最後の除数と k を掛けたものを引く」と覚えなければならない。また，何でもアルゴリズム化することがよいとは限らない。一般解については教科書の方法が適切であろう。

§5. 最後に

「互除法の逆行」の発見者は小島氏であり，私はその記法の改良を試みたに過ぎない。しかし指導上アルゴリズムの記法は大変重要である。記法がやや複雑なために優れたアルゴリズムが埋もれてしまうとすれば大変惜しいと思い，今回の投稿に至った。私自身，特殊解を求める場合このアルゴリズムを用いているが実に快適である。また生徒に指導してみたところ，生徒はすぐに理解した。小島氏による優れたアルゴリズム「互除法の逆行」が広まることを祈念する。

《参考文献》

〔1〕 数研通信　数学　No.78　数研出版

〔2〕 新編　数学A　数研出版

〔3〕 チャート式数学　解法と演習　数学Ⅰ＋A　数研出版

（岐阜県立長良高等学校）