素数列の考察

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

小さい方からk番目の素数を $p(k)=p_k$ と表す。

$p(k)$：2，3，5，7，11，13，17，19，……

この数列に関して，山本好男(元市立広島工業高等学校)教諭から，主題1のように素数の逆数和は発散するが，素数番目の素数の逆数和は発散するか，あるいは有界であるかとの問題提起を受けた。検討した結果，主題2のように有界であるとの結論を得たので，2つの主題の証明を高校数学で与える。

［主題1］ オイラー

素数の逆数和は発散する。すなわち

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p(k)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{p_m}\longrightarrow\infty(m\to\infty)$$

［主題2］ 素数番目の素数の逆数和は有界である。すなわち

$$T_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p(p(k))}$$

$$=\frac{1}{p(2)}+\frac{1}{p(3)}+\frac{1}{p(5)}+\cdots\cdots+\frac{1}{p(p(m))}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{1}{p(p(m))}$$

とおくと，T_m は有界である。

§2. 素数の逆数和は発散

［準備］ このレポートを通して，自然数nに対し

$$A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

$$B_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

とおく。また，$n\geqq2$ のとき，n以下の素数の個数を $m=\pi(n)$ と表し，n以下の素数の集合を

$\{p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_m\}$ ……(*)

とする。これらの逆数和と2乗の逆数和を

$$S_n=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p_m}$$

$$C_n=\frac{1}{{p_1}^2}+\frac{1}{{p_2}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{p_m}^2}$$

とおく。まず，$S_n\longrightarrow\infty$ $(n\to\infty)$ を示そう。

［命題1］ (1) $n\geqq1$ のとき，$B_n<2$，$C_n<2$

(2) $n\geqq1$ のとき，

$$A_n>\log(n+1)>\log n$$

(3) $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，

$$\log\frac{1}{1-x}\leqq x+x^2$$

証明 (1) 数列の和を積分で評価する方法により，$B_n<2$ が従う。

(チャート式　基礎からの数学Ⅲ＋Cワイド版 '13 p.240 重要例題158)

後半は，$C_n\leqq B_n$ による。

(2) 同様の方法による。

(同 p.240 練習158(1))

(3) $$f(x)=x+x^2-\log\frac{1}{1-x}$$

$$=x+x^2+\log(1-x)$$

とおく。

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき，

$$f'(x)=1+2x-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(1-2x)}{1-x}\geqq0$$

および $f(0)=0$ により，この区間で $f(x)\geqq0$ が得られる。 終

［命題2］ 自然数nに対して $m=\pi(n)$ とする。

(1) $\log_2 n\leqq N$ となる自然数Nをとるとき

$$A_n\leqq\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{{p_1}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{p_1}^N}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{{p_2}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{p_2}^N}\right)$$
$$\times\cdots\cdots$$
$$\times\left(1+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{{p_m}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{{p_m}^N}\right)$$

(2) $\log(A_n)\leqq\sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$

証明 (1) 右辺を展開すると，次のような $\frac{1}{k}$ の総和となる。

k は，$k={p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots\cdots{p_m}^{e_m}$ の形であり，ここで，各 e_j $(1\leqq j\leqq m)$ は $e_j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N$ の範囲を動く。

(*)と $n\leqq 2^N$ から，このような k は n 以下の自然数を1回ずつとる。すると，右辺を展開した中に，A_n の各項 $\frac{1}{k}$ $(1\leqq k\leqq n)$ が1回ずつ現れるので，$A_n\leqq$(右辺) である。

(2) 等比数列の和の公式により，$p\geqq 2$ のとき

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p^N}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

さらに(1)により

$$A_n\leqq\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\times\cdots\cdots\times\frac{1}{1-\frac{1}{p_m}}$$

である。両辺の自然対数をとると

$$\log(A_n)\leqq\sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$$ 終

［**命題3**］ (1) $n\geqq 2$ のとき，$S_n>\log(\log n)-2$
(2) 素数は無限個存在する。
(3) 主題1が成り立つ。

証明 (1) $\log(\log n)$

$\leqq\log(A_n)$ (∵命題1(2))

$\leqq\sum_{k=1}^{m}\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$ (∵命題2(2))

$\leqq\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{p_k}+\frac{1}{{p_k}^2}\right)$ (∵命題1(3))

$=S_n+C_n$

$<S_n+2$ (∵命題1(1))

ゆえに，$S_n>\log(\log n)-2$

(2) $n\to\infty$ のとき $\log n\to\infty$

したがって，$\log(\log n)\to\infty$ となり，$S_n\to\infty$ が成り立つ。もし，素数が有限個ならば S_n は有界となるから，この事実は素数が無限に存在することを示す。

(3) $m\to\infty$ のとき $p(m)\to\infty$ (∵ (2))
に注意すると

$$S_{p(m)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{p(k)}$$
$$>\log(\log p(m))-2\to+\infty\ (m\to\infty)$$ 終

§3. 素数番目の素数の逆数和は有界

続いて，主題2を示すための準備をする。

［**命題4**］ (1) $n\geqq 2$ のとき

$$\pi(2n)-\pi(n)\leqq\log 2\times\frac{2n}{\log n}$$

(2) $k\geqq 3$ のとき

$$\pi(2^k)-\pi(2^{k-1})\leqq 6\left(\frac{2^k}{k}-\frac{2^{k-1}}{k-1}\right)$$

(3) ある正の定数Aが存在して，

$n\geqq 2$ のとき $\pi(n)\leqq A\frac{n}{\log n}$ が成り立つ。

証明 (1) 二項定理により

$$2^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\geqq{}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{(2n)!}{n!\times n!}$$

であるが，ここで $n<p\leqq 2n$ となる任意の素数 p について，$n!$ は p を素因数にもたないので，$n!\times n!$ も p を素因数にもたない。

他方，$(2n)!$ は p を素因数にもつから，${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は各 p を素因数にもつことになり，

$$2^{2n}\geqq{}_{2n}\mathrm{C}_n=(\text{自然数})\times\prod_{\substack{n<p\leqq 2n\\ p\text{は素数}}}p\geqq\prod_{\substack{n<p\leqq 2n\\ p\text{は素数}}}p$$
$$\geqq\prod_{\substack{n<p\leqq 2n\\ p\text{は素数}}}n\quad=n^{\pi(2n)-\pi(n)}$$

となる。両辺の自然対数をとると，

$$2n\cdot\log 2\geqq\{\pi(2n)-\pi(n)\}\log n$$

$$\therefore\quad\pi(2n)-\pi(n)\leqq\log 2\times\frac{2n}{\log n}$$

(2) まず，$k\geqq 3$ のとき

$$\frac{2^k}{k-1}\leqq 6\left(\frac{2^k}{k}-\frac{2^{k-1}}{k-1}\right)\qquad\cdots\cdots①$$

という不等式を準備しておく。

$\left(\text{両辺に } \dfrac{k(k-1)}{2^{k-1}} \text{ を掛けると簡単にわかる。}\right)$

不等式(1)において，$n=2^{k-1}$ $(k \geqq 3)$ を代入して①を使うと

$$\pi(2^k)-\pi(2^{k-1}) \leqq \log 2 \times \frac{2^k}{\log 2^{k-1}}$$
$$=\frac{2^k}{k-1} \leqq 6\left(\frac{2^k}{k}-\frac{2^{k-1}}{k-1}\right)$$

(3) $m \geqq 3$ のとき，不等式(2)において

$k=3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ m$ として和をとると

$$\sum_{k=3}^{m}\{\pi(2^k)-\pi(2^{k-1})\} \leqq \sum_{k=3}^{m} 6\left(\frac{2^k}{k}-\frac{2^{k-1}}{k-1}\right)$$

$$\therefore \quad \pi(2^m)-\pi(2^2) \leqq 6\times\frac{2^m}{m}-12$$

ここで，$\pi(2^2)=2 \leqq 12$ より，

$m \geqq 3$ のとき $\pi(2^m) \leqq 6\times\dfrac{2^m}{m}$ が従う。

以上から，$n \geqq 8$ のとき，$2^{m-1}<n \leqq 2^m$ となる自然数 m $(\geqq 3)$ をとれば，$2^m<2n$，$\log_2 n \leqq m$ より

$$\pi(n) \leqq \pi(2^m) \leqq 6\times\frac{2^m}{m} \leqq 6\times\frac{2n}{\log_2 n}$$
$$=12\cdot\log 2\times\frac{n}{\log n}$$

したがって，定数Aを十分大きくとれば，$n \geqq 2$ のときにも　$\pi(n) \leqq A\dfrac{n}{\log n}$　が成り立つ。終

> ［**命題 5**］　ある正の定数Bが存在して，
> $m \geqq 1$ のとき $p(m) \geqq Bm\cdot\log m$
> $p(p(m)) \geqq Bm\cdot(\log m)^2$
> が成り立つ。

証明　$n=p(m)$ とすると，$n \geqq 2$ かつ $m=\pi(n)$ である。関数 $f(x)=x\cdot\log x$ は $x \geqq 1$ で増加するから，命題4(3)を満たすAをとれば

$$f\left(A\frac{n}{\log n}\right) \geqq f(\pi(n))=f(m)=m\cdot\log m \quad \cdots\cdots①$$

他方，$f\left(A\dfrac{n}{\log n}\right)=A\dfrac{n}{\log n}\cdot\log\left(A\dfrac{n}{\log n}\right)$

において，$A \geqq e$ として良い(A は十分大きい)から

$n \geqq A$ のとき $A\dfrac{n}{\log n} \leqq n\times\dfrac{n}{1}=n^2$ より

$$f\left(A\frac{n}{\log n}\right) \leqq A\frac{n}{\log n}\cdot\log(n^2)$$
$$=2A\cdot n=2A\cdot p(m) \quad \cdots\cdots②$$

①，②によれば，

$p(m) \geqq A$ のとき　$p(m) \geqq \dfrac{1}{2A}m\cdot\log m$

以上から，十分小さな正の定数Bを選ぶことにより，$m \geqq 1$ のときにも前半の不等式が成り立つことがわかる。

次に，後半の不等式を示す。前半の不等式を繰り返し使って

$$p(p(m)) \geqq B\cdot p(m)\cdot\log p(m)$$
$$\geqq B\cdot Bm\cdot\log m\cdot\log(Bm\cdot\log m)$$

したがって，$m \geqq B^{-2}$ かつ $m \geqq e$ のとき，

$B\cdot m\cdot\log m \geqq m^{-\frac{1}{2}}\cdot m\cdot 1=m^{\frac{1}{2}}$ であるから，このとき　$p(p(m)) \geqq B^2m\cdot\log m\cdot\log(m^{\frac{1}{2}})$

$$=\frac{1}{2}B^2m\cdot(\log m)^2$$

定数Bを取り直せば，$m \geqq 1$ においても後半の不等式が成り立つ。終

> ［**命題 6**］　主題 2 が成り立つ。

証明　関数 $\dfrac{1}{x\cdot(\log x)^2}$ が $x>1$ で減少することと命題5により，$m \geqq 3$ のとき

$$T_m=\frac{1}{p(p(1))}+\frac{1}{p(p(2))}+\sum_{k=3}^{m}\frac{1}{p(p(k))}$$
$$\leqq\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\sum_{k=3}^{m}\frac{1}{Bk\cdot(\log k)^2}$$
$$\leqq\frac{8}{15}+\sum_{k=3}^{m}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{Bx\cdot(\log x)^2}dx$$
$$=\frac{8}{15}+\int_{2}^{m}\frac{1}{Bx\cdot(\log x)^2}dx$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{1}{B}\left[\frac{-1}{\log x}\right]_2^m$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{1}{B\cdot\log 2}-\frac{1}{B\cdot\log m}$$
$$<\frac{8}{15}+\frac{1}{B\cdot\log 2}=(\text{定数})$$

となり，結論が得られる。終

《参考文献》

〔1〕 黒川信重　オイラー探検　シュプリンガー・ジャパン　*pp*.22-29

〔2〕 一松信「n と $2n$ の間に素数がある」数研通信 No.70　*pp*.2-5　数研出版

〔3〕 チャート式基礎からの数学Ⅲ＋C　ワイド版 '13　数研出版

(広島県　広島市立基町高等学校)